Dynamic Buckling of Inelastic Structures

P. Pegon, P. Guelin
Institut de Mécanique de Grenoble, B.P. 68, F-38402 St Martin D'Hères, Cedex, France

Summary

The aim of this paper is to provide research engineers with a method of approach, qualitative feature and order of magnitude of the relevant parameters in the field of dynamic buckling of structures exhibiting constitutive irreversibility and geometrical, constitutive or loading imperfections.

It is difficult to adjust some of the classical analysis of the quasi-static elastic case [1] . There remain also some difficulties in justifying the choice of constitutive schemes and in dealing with general kinematic formulation [2] . Moreover, the interpretation of dynamical experimental data is not an easy matter [3] [4] . Consequently, the attempts described here use a simple symbolic model including all essential physical aspects. This symbolic model, of discrete character, is an n-hinged strut with masses located at each n + 1 joint. The constitutive properties of the strut and hinge are defined using the same method : a dash-pot is in parallel with a two fold element (spring and friction-slider in series). The intrinsic restrictions are : the two dimensionality assumption, however no additional hypothesis are made concerning the kinematic of the constitutive elements ; the use of simple sources of intrinsic dissipation. The relevant question of the longitudinal-transverse coupling effects is studied. Then, after various validation, we verify that a Lagrange resolution of this n + 1 body problem gives physical relevant qualitative results concerning rods and cylindrical shells subjected to impact loading.

Introduction

Dans cette étude, une des conjectures sous-jacente est la suivante : la phase dynamique de durée finie non nulle (snap) d'une évolution réelle de flambage est un processus irréversible unique qui, d'une part, réalise le passage entre deux ensembles d'évolutions stationnaires en un sens thermodynamique (comportement "élastique" avant et après le snap, par exemple) et qui d'autre part, reflète à l'échelle de la structure les interactions d'actions inertielles (taux d'énergie cinétique reçue) et thermomécaniques (taux de chaleur reçue) qui existent réellement à toutes échelles.

On cherche donc à explorer les possibilités de schématisation du processus de flambage réel à partir de la loi de la dynamique et d'une loi d'hystérésis, lois mises en jeu à l'échelle fine que représente une barre ou une rotule du système à n - 1 barres rotulées. Aucune statistique, variable cachée ou quantification essentielle n'est introduite. L'esprit de l'étude suit donc la ligne partiellement explicitée en [6] [7] et [8].

Les résultats sont les suivants : d'une part la conjecture indiquée s'avère vraisemblable ; d'autre part la propagation de taux thermodynamiques significatifs est mise en évidence ; enfin il est possible de dégager une classification quantitative de la sensibilité au flambage de structures affectées des divers défauts que présentent les structures réelles.

1. Méthode de résolution numérique

1.1 Il est commode de considérer d'abord le système rudimentaire représenté sur la figure 1. Les barres, de longueur initiale lo, actuelle l, d'allongement a (= l - lo), sont dotées d'éléments constitutifs (notés L) associant, en parallèle, des propriétés élastiques (raideur ke) visqueuse (coefficient c) et élastoplastique (raideur k et seuil en déplacement lc). Les rotules sont dotées de masse (m) et du même genre d'éléments constitutifs (notés A) où les moments $\mathcal{M}$ et les angles jouent le rôle des forces et des longueurs dans les éléments L : les notations géométriques sont φ_o , φ , α et les paramètres physiques sont Ke, C, K, φ_c . Si xi et yi sont les coordonnées cartésiennes de la masse de rang i, en notant $X_i = x_{i+1} - x_i$ et $Y_i = y_{i+1} - y_i$, on a :

$$\ell_i = \left(X_i^2 + Y_i^2\right)^{1/2} \quad ; \quad \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{X_i Y_{i+1} - X_{i+1} Y_i}{X_i X_{i+1} + Y_i Y_{i+1}} \tag{1}$$

Les énergies cinétique et interne sont, en l'absence de frottement :

$$E_i^c = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2\right)$$

$$E_i^L = \frac{1}{2}\left(k_i + k_{ei}\right) a_i^2 \quad ; \quad E_i^A = \frac{1}{2}\left(K_i + K_{ei}\right) \alpha_i^2$$

La puissance dissipée en chaleur par viscosité est $\dot{Q}_i^L = \frac{1}{2} c \, \dot{a}_i^2$ pour l'élément Li et $\dot{Q}_i^A = \frac{1}{2} C \dot{\alpha}_i^2$ pour la rotule Ai. Toujours en l'absence de glissement des frotteurs, la première (selon x) des 2 équations du mouvement du point M_j de masse mj est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \sum_1^n E_i^c\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_1^n E_i^c\right) = - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_1^{n-1} E_i^L + \sum_1^{n-2} E_i^A\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}\left(\sum_1^{n-1} \dot{Q}_i^L + \sum_1^{n-2} \dot{Q}_i^A\right) + F_{x_j} \tag{2}$$

où F_{x_j} est la composante selon x de la force extérieure exercée au point Mj, et où la dérivation est effectuée, classiquement, en considérant x_j et $\dot{x}_j$ comme des variables indépendantes. En tenant compte de : $\dot{a}_i = (x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i)/\ell_i$, on obtient d'abord :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial x_{i+1}} = -\frac{X_i}{\ell_i} \quad ; \quad \frac{\partial a_i}{\partial y_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial y_{i+1}} = \frac{Y_i}{\ell_i}$$

et des relations analogues concernant les éléments A (de façon à déterminer $\partial\alpha_i/\partial x_i$, $\partial\alpha_i/\partial x_{i+1}, \ldots$), puis un système d'équations dont la forme peut-être indiquée brièvement dans le cas unidimensionnel :

$$m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = -\left((k_i + k_{ei})\, a_i + c_i \dot{a}_i\right) \frac{\partial a_i}{\partial x_i} - \left((k_{i+1} + k_{ei+1})\, a_{i+1} + c_{i+1} \dot{a}_{i+1}\right) \frac{\partial a_{i+1}}{\partial x_i} + F_{x_i} \qquad (3)$$

Reste à prendre en compte le frottement. On extrait de l'intensité albégrique des forces (et moments) les contributions dues aux ressorts en série avec les patins : si, par exemple, $|a_i| > \ell_{ci}$, l'intensité de la force longitudinale est $k_i\, \ell_{ci}$ et son signe est celui de $\dot{a}_i$. Si la vitesse de déplacement s'inverse (décharge du ressort) on évalue la contribution du ressort à l'aide de la nouvelle position pour laquelle il est à vide.

Les 2n équations du second ordre peuvent être mises sous la forme de 4n équations :

$$\frac{dZ_i}{dt} = f(Z_j, t) \qquad ; i = 1,4\,n \quad ; \quad j = 1,4\,n$$

L'intégration est réalisée par une méthode du type Runge-Kutta d'ordre 4 (mise en oeuvre dans RKGS du logiciel SSP d'IBM). Cette méthode, à pas non lié, est compatible avec le fait que les affixes de plastification et de déplastification sont des fonctionnelles du chargement : on ne sait ni où ni quand ils interviennent. La méthode présente cependant l'inconvénient d'accumuler les erreurs de troncature, bornées typiquement à 10^{-6} par pas de temps lors de calcul en simple précision avec un bruit numérique de l'ordre de 10^{-8}.

1.2 La présentation sommaire de la méthode de formulation et de la méthode de résolution numérique vient d'être faite à l'aide d'un système symbolique simple mais dénué de caractéristiques intéressantes en matière de couplage des effets longitudinaux et de flexion : le fait que les choix des éléments L et A soient jusqu'à présent indépendants restreint le sens physique de la schématisation. Il est en effet clair que les systèmes physiquement significatifs doivent tenir compte de l'influence de la plasticité longitudinale sur la rélation entre moment de flexion et courbure.

Pour mieux traduire cette interaction on remplace les éléments A par des éléments de "flexion" (notés R) : la variable géométrique essentielle n'est plus l'angle φ mais la courbure $\mathcal{X}$, prise égale à celle du cercle passant par la rotule considérée et les deux rotules adjacentes. Les notations géométriques sont $\mathcal{X}_o$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{R} = \mathcal{X} - \mathcal{X}_o$. Les paramètres physiques sont notés $\mathcal{J}_e$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{X}_c$ auxquels s'ajoute une longueur de référence $\mathcal{L}$. La courbure est :

$$\mathcal{X}_i = (X_i Y_{i+1} - X_{i+1} Y_i)\left[\left(X_i (X_{i+1}^2 + Y_{i+1}^2) + X_{i+1}(X_i^2 + Y_i^2)\right)^2 + \left(Y_i (X_{i+1}^2 + Y_{i+1}^2) + Y_{i+1}(X_i^2 + Y_i^2)\right)^2\right]^{1/2}$$

En l'absence de dissipation par frottement, l'énergie interne des éléments R s'exprime par : $E_i^R = \frac{1}{2}(\mathcal{J}_i + \mathcal{J}_{ei})\,\alpha_i\, \mathcal{R}_i^2$, et la puissance dissipée en chaleur par: $\dot{Q}_i^R = \frac{1}{2}\, \mathcal{C}_i \alpha_i \dot{\mathcal{R}}_i^2$. Dans l'équation (2) les termes E_i^A et $\dot{Q}_i^A$ sont remplacés par E_i^R et $\dot{Q}_i^R$. Une fois effectué le calcul des termes $\partial\mathcal{R}/\partial x_j$ et $\partial\mathcal{R}/\partial y_j$ pour $i \leqslant j \leqslant i + 2$, on se trouve ramené à un problème d'évolution analogue à celui du 1.1. Il reste donc à préciser le couplage L - R.

1.3. Avant de ce faire, on indique comment l'on détermine les paramètres constitutifs, du genre L et R, associés à un corps élancé de section Ω , de masse volumique ρ , de module d'Young E et de contrainte limite σ_c (ces trois derniers paramètres seront pris, par la suite, égaux respectivement à 7 850k /m^3, 2.10^{11} pa et 3.10 ^{8} pa correspondant à un acier doux). On procède d'abord, le long de la fibre moyenne initiale, à la répartition des points M supportant les masses : d'où ℓ_{oi} , $\mathcal{X}_{io}$ et $m_i = (\ell_{oi+1} + \ell_{oi})/2$ Ensuite, pour les éléments L, on traduit le comportement d'un élément en écrivant que, comme : $F_i = \Omega\sigma_i = E\Omega a_i/\ell_{oi}$, alors : $k_{ei} + k_i = E\,\Omega/\ell_{oi}$, k_{ei} étant défini par $N = k_{ei}/k_i$. Puis, comme : $\sigma_c = E\,\mathcal{E}_c$, alors $\ell_{ci} = \ell_{oi}\sigma_c/E$. Le coefficient de viscosité c_i est déterminé par la donnée d'une vitesse de référence v_{ref} pour laquelle on fixe $q = \mathcal{P}_v/\mathcal{P}_p$, rapport de la puissance visqueuse à la puissance plastique. Enfin, après avoir vérifié l'allure élastoplastique du graphe $\mathcal{M}(\mathcal{X})$, on procède comme ci-dessus. Par exemple si le corps est une tige cylindrique de rayon R on trouve :

$$\mathcal{J}_i + \mathcal{J}_{ei} = E\pi R^4/4 \quad ; \quad \mathcal{J}_{ei}/\mathcal{J}_i = N \quad ; \quad \mathcal{X}_c = 16\,\sigma_c/3\pi ER$$

$$\mathcal{L}_i = (\ell_{oi} + \ell_{oi+1})/2 \quad ; \quad \mathcal{C}_i = q\,\sigma_c\,\pi R^4 \mathcal{L}_i/2\,v_{ref}$$

ce qui détermine les paramètres des éléments R.

1.4 En l'absence de couplage (situation unidimensionnelle) l'évaluation de la validité des solutions numériques obtenus a été basée sur : la conservation de l'énergie, la vitesse de propagation d'ondes élastiques, l'étude de la propagation d'ondes viscoélastiques (que l'on compare avec les résultats de [4]) et la variation du découpage initial. Si les trois premiers points donnent entière satisfaction pour un milieu à 20 barres (resp 10^{-5}, 10^{-2} et 10^{-3} d'erreur relative), la variation du découpage, en milieu élastoplastique, bien que ne donnant pas lieu à des modifications qualitatives, induit cependant des modifications géométriques discernables sur les graphiques.

1.5 On passe à l'étude du couplage. Une étude préliminaire est effectuée à l'aide d'un modèle de poutre stratifiée, de courbure constante $\mathcal{X}$ et dont les fibres sont dotées de propriétés élastoplastiques (k raideur par unité de surface et s seuil de plasticité en déplacement). On note a l'allongement de la fibre moyenne, F et $\mathcal{M}$ les éléments de réduction du torseur des efforts (constant) sur cette fibre. On constate que le graphe F(a) reste élastoplastique, même si le seuil tend à diminuer pour de fortes valeurs de $\mathcal{X}$, alors que le graphe $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ montre l'effondrement de $\mathcal{M}$ pour des valeurs de $\dot{a}$ assez faibles. Ainsi les bifurcations "latérales" risquent d'être profondément affectées par la prise en compte du couplage, tout particulièrement dans le cas des tiges soumises à des chocs. Dans ce dernier cas, on étudie le modèle stratifié soumis à une vitesse de courbure constante et à une vitesse d'allongement dont la forme, suggérée par les résultats longitudinaux, est a = A t^{2}exp(-Bt) où les constantes A et B sont choisies de façon à ce que le maximum V_M de $\dot{a}$ advienne pour un temps fixé tf. En imposant tf = 2 secondes et en faisant varier V_M on obtient les résultats de la figure 2, qui suggèrent la schématisation suivante : on impose le critère de mise à zéro du moment :

$$|\dot{a}|/|\dot{\mathcal{X}}|s^2 > c$$

avec retour au mode "normal" si le rapport est inférieur à c, critère mis en jeu si et seulement si $|\dot{a}|$ est supérieur à une vitesse d'allongement typique des oscillations reversibles : $|\dot{a}| > \dot{a}_{min}$. On est conduit à adopter c = 6.10^4 et $\dot{a}_{min}$ = 2 m/s. Ce choix, dicté par l'examen de la figure 2 et une certaine expérience du modèle, se valide de la façon suivante : les résultats a(t), $\dot{a}$(t), χ (t), $\dot{\chi}$ (t) aux "bornes" des éléments constitutifs, obtenus par la simulation du modèle à n corps, sont imposés dans le modèle de poutre stratifiée, de sorte que l'on engendre des moments et des forces à comparer, dans des conditions variées, aux moments et aux forces effectivement mis en jeu dans le modèle à n corps.

Si l'on compare maintenant deux simulations de tiges soumises à des chocs, avec ou sans couplage, on note que, malgré le découplage temporel des plastifications de L et de R (les plissements plastiques sont toujours postérieurs aux plastifications longitudinales) et malgré la brièveté temporelle de l'interaction L - R, la forme et l'importance des plissements sont profondéments affectés : les phases de plastifications longitudinales rapides pilotent le comportement transversal, ce qui justifie l'importance de l'étude de la propagation longitudinale de grandeur telle que $\dot{Q}$.

2. Problèmes d'ondes unidimensionnelles

L'étude est faite en imposant y_i nul. Les résultats saillants sont les suivants. D'une part il est possible de montrer l'existence d'une propagation (amortie, avec distorsion et peu de dispersion) du taux $\dot{Q}$ de chaleur dégagée par frottement et d'en estimer la vitesse de propagation : ce résultat exige des simulations de systèmes de diverses longueurs soumis à des conditions aux limites variées. D'autre part l'évaluation de la vitesse de propagation d'un taux tel que $\dot{Q}$ est assez précise pour qu'il soit possible de réaliser non seulement une mise en évidence de l'influence de la viscosité, mais aussi une comparaison avec les estimations classiques. En ce qui concerne le premier point, la vitesse passe de 305 à 375 m/s lorsque l'on met en jeu une puissance visqueuse passant de 0 à 25 % de la puissance plastique pour une vitesse de déformation de l'ordre de $10^3\ s^{-1}$. En ce qui concerne le cas non visqueux, il suffit de choisir les valeurs de ke de l'ordre de k/500 par exemple pour constater que la vitesse de propagation précitées (305 m/s) diffère notablement de celle obtenue classiquement en employant le module tangent (225 m/s). Enfin, les conditions de projection influent sur la profondeur de propagation de $\dot{Q}$ et sur le temps de rebond : on constate (cf. fig. 3 relative à des corps de 0.5 m de longueur) que les modalités du rebond, qui revêtent à l'évidence trois aspects différents, sont correlées à la nature des trajets de chargement réalisés dans les éléments constitutifs. Dans une première zone (notée AB sur la figure 3) les processus sont élastiques et le rebond advient bien entendu après un aller et retour. Dans la zone BC, les trajets plastiques sont monotones. A la zone CD se trouvent associés des trajets plastiques de "décharges". Pour finir, il est important de noter que l'ensemble de ces processus est d'une part très peu perturbé par d'éventuelles réflexions successives d'ondes élastiques (cas des barres assez courtes) et d'autre part difficilement interprétable à l'aide des diagrammes classiques de propagations (location diagrams de [3]).

3. Problèmes de flambages en présence de défauts

Pour des raisons expérimentales, on s'intéresse spécialement aux formes finales du plissement. On montre ainsi : l'influence de l'orientation de la première barre du modèle, l'importance des défauts de courbure, les effets intéressants de la superposition de défauts constitutifs et de courbure. On opère sur des systèmes généralement discrétisés en 10 barres, d'une longueur totale initiale de 0,5 m, projetés à des vitesses allant de 80 à 180 m/s. Compte tenu des résultats expérimentaux disponibles dans [4], le diamètre de tige équivalente est fixé à 5.10^{-3} m.

3.1 Les défauts de chargement sont simulés par la spécification d'une vitesse tangentielle allant de 0.1 m/s à 0.5 m/s. On note essentiellement que le plissement est fortement influencé par la vitesse d'impact (comparer par exemple les deux formes finales de la figure 4). Tout en restant confiné en tête, le plissement gagne progressivement la tige à mesure que la vitesse d'impact augmente.

3.2. Les défauts de géométrie initiale sont simulés par l'une des formes sinus, demi sinus, cosinus ou demi cosinus (défauts globaux) ou par l'excentrement d'une seule rotule (défauts locaux). On observe : l'influence de l'orientation de la première barre (cf. fig. 5 permettant de comparer les formes demi sin et demi cos) ; l'influence de la courbure (cf. fig. 6 donnant la comparaison demi sin et sin qui permet de voir que le plissement change peu à même courbure en tête et géométrie différentes) ; une transition rapide, en fonction de l'amplitude de défauts, entre un régime de rebond avec faible plissement et un régime "d'écrasement" avec fort plissement et faible vitesse de rebond (cf. fig. 7 a, b, c). En ce qui concerne les défauts localisés, tous étudiés avec une vitesse d'impact de 160 m/s, on note un plissement important localisé au défaut, alors même que l'amplitude de défaut ne dépasse pas $2.5\ 10^{-6}$ m.

3.3. Les défauts constitutifs sont simulés par une diminution du seuil de plasticité, diminution qui est, soit répartie linéairement sur la tige, soit localisée sur et autour d'une rotule. Chacun de ces défauts constitutifs est superposé à un défaut d'incidence ou à un défaut de géométrie initiale qui, à lui seul, ne donnait pas lieu à des déformations de flexion plastique "importantes" dans les conditions d'impact de la présente étude (120 m/s) : le qualificatif "important" signifie que les déformations de flexion restaient masquées par les vibrations élastiques finales. Les résultats sont très différents selon que le défaut constitutifs est superposé à un défaut d'incidence ou à un défaut géométrique. Dans le premier cas les conclusions données en 3.1 subsistent en présence de défauts constitutifs considérables allant jusqu'à 40 % de diminution du seuil de plasticité. L'étude du second cas dégage le résultat remarquable : dès la mise en jeu de petites amplitudes de défauts constitutifs et quelqu'en soit la localisation dans la première moitié de la tige, les formes finales sont quasi identiques (cf. fig. 8).

4. Exemples d'applications variées

On note ΔT l'interval de temps séparant, sur la figure 9, le tracé de 2 configurations successives. Tous les chargements uniformes atteignent linéairement leur maximum en 10^{-4}s et décroissent immédiatement et linéairement jusqu'à zéro en 3.10^{-4} s.

Les 2 premiers exemples concernent une poutre encastrée chargée uniformément (fig. 9a) ou localement en extrémité libre (fig. 9b). Le ΔT vaut 10^{-3} s. On donne ensuite 4 résultats relatifs au flambage sous charge uniforme d'un arc encastré : discrétisation 10 barres (fig. 9c) avec défaut (fig. 9d) avec discrétisation 20 barres (fig. 9e) et sous charge plus intense d'un facteur 1.5 (fig. 9f). Le ΔT vaut 5.10^{-5} s. Les deux dernières applications concernent un chargement uniforme de postique encastré en pieds (fig. 9g) et un impact symétrique local sur un anneau (fig. 9b). Les ΔT valent $2\ 10^{-4}$s et $5\ 10^{-4}$s.

Comme ceux du paragraphe 3, les résultats sont obtenus en utilisant un minicalculateur (NORSK 10).

References

/1/ THOMSON, J.M.T., HUNT, G.W., "A General Theory of Elastic Stability", John Wiley, 1973.

/2/ BERNADOU, M., BOISSERIE, J. M., "The finite element method in thin shell theory", Birkhäuser, 1982.

/3/ JOHNSON, W., "Impact strengh of Materials", Edward Arnold Ltd, 1972.

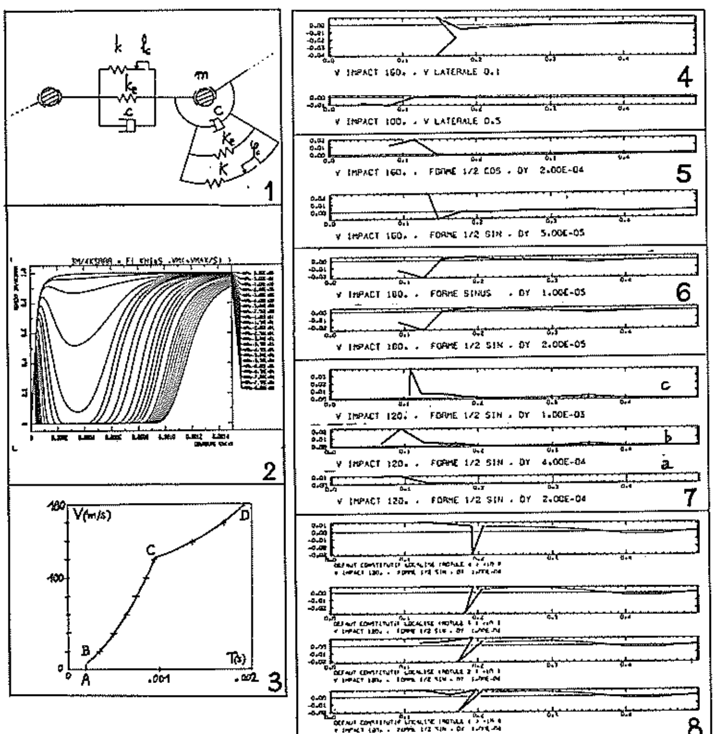
/4/ HERRMANN, G., "Dynamic Stability of Structures", Pergamon, 1967.

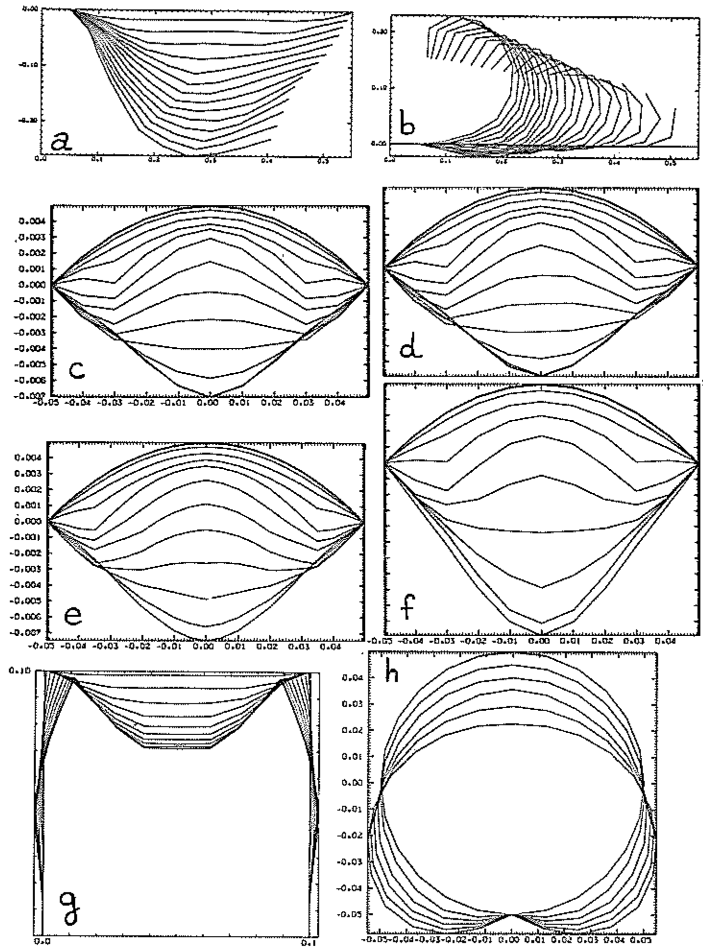
/5/ NOWACKI, W., "Théorie du Fluage", Eyrolles, 1965.

/6/ GUELIN, P., "Remarques sur l'hystérêsis mécanique. I. Les bases d'un schéma thermomécanique à structure héréditaire", Journal de Mécanique, Vol. 19, n° 2, p. 217-247, (1980).

/7/ GUELIN, P., BOISSERIE, J.M., "The Heat Supply Trap Lying at the Origin of thermo-inelastic Analysis", Res. Mechanica Letters, 2, pp. 13-17, (1982).

/8/ BOISSERIE, J.M., GUELIN, P., TERRIEZ, J.M., WACK, B., "Application of a hereditary constitutive law of discrete memory type", ASME, to be published.




a
b
c
d
e
f
g
h