

**A NUMERICAL METHOD FOR COMPLEX STRUCTURAL  
DYNAMICS IN NUCLEAR PLANT FACILITIES****(Ein numerisches Verfahren zur Berechnung komplizierter  
dynamischer Probleme bei Kernkraftwerkskomponenten)****W. ZEITNER***Kraftwerk Union AG, Postfach 3220, D-8520 Erlangen, Germany*

The solution of dynamic problems is often connected with difficulties in setting up a system of equations of motion because of the constraint conditions of the system. Such constraint conditions may be of geometric nature as for example gaps or slidelines, they may be compatibility conditions or thermodynamic criteria for the energy balance of a system.

The numerical method proposed in this paper for the treatment of a dynamic problem with constraint conditions requires only to set up the equations of motion without considering the constraints. This always leads to a relatively simple formulation. The constraint conditions themselves are included in the integration procedure by a numerical application of Gauss' principle.

## 1. Einleitung

Der erste Schritt eines Problem es aus der technischen Mechanik ist seine Formulierung in Bewegungsgleichungen, die dann zu integrieren sind.

Vor der Zeit der modernen Rechenanlagen setzte meist die Integration der praktischen Durchführbarkeit von Berechnungen die Grenzen. Heute lassen sich auch schwierige Differentialgleichungen numerisch integrieren. Deshalb steht die Problematik bei der Formulierung von Bewegungsgleichungen jetzt im Vordergrund.

Wesentlich leichter als durch ein System verträglicher Differentialgleichungen lassen sich mechanische Aufgaben häufig in einer "halbfertigen" Form ausdrücken, nämlich als System mit Nebenbedingungen. Gerade im Bereich der Technik bietet sich diese Art der Formulierung an, weil man mit Hilfe der Nebenbedingungen auf einfache Weise geometrische Zwänge, denen das System unterworfen ist, kennzeichnen kann. Beispiele für solche Zwänge sind Auflager, Drehpunkte, Gleitbahnen usw.

Im Allgemeinen bestehen zwischen den Differentialgleichungen, die das System beschreiben und den Nebenbedingungen Widersprüche, die sich aber auf rein formale Weise mittels der Lagrangeschen Gleichungen erster Art beseitigen lassen. Die Integration dieser Lagrangeschen Gleichungen erster Art erfordert besondere Verfahren und um ein solches geht es hier. Die Anwendung dieses Verfahrens ermöglicht es, die sehr einfache Beschreibung eines dynamischen Problem es als System mit Nebenbedingungen mit der Rechenmaschine zu bearbeiten.

## 2. Die Lagrangeschen Gleichungen erster Art

Die Bewegungsgleichungen eines mechanischen System es mit  $n$  Freiheitsgraden

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{f}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \underline{0} \quad (1)$$

seien unter Nichtbeachtung von  $z$  Nebenbedingungen

$$\underline{g}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \underline{0} \quad (2)$$

erstellt.

In den Gleichungen (1) und (2) ist  $\underline{M}$  die Koeffizientenmatrix der Beschleunigungen  $\ddot{\underline{q}}$ .  $\dot{\underline{q}}$  bzw.  $\underline{q}$  ist der Vektor der Geschwindigkeiten bzw. Koordinaten des System es.  $\underline{f}$  und  $\underline{g}$  charakterisieren beliebige Funktionen der in Klammern angegebenen Größen,  $t$  ist die Zeit. Die  $z$  Komponenten des Vektors  $\underline{g}$  seien der Übersichtlichkeit wegen so geordnet, daß die  $r$  ersten Komponenten die Geschwindigkeiten nicht enthalten, die  $z-r$  letzten Komponenten jedoch auch von den Geschwindigkeiten abhängen.

Die Lagrangeschen Gleichungen erster Art haben die Form [1 bis 5]

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{f}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \underline{G}\underline{\lambda} = \underline{o} . \quad (3)$$

Die Matrix  $\underline{G}$  enthält die partiellen Ableitungen der Nebenbedingungen nach den Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten,

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial q_1} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_z}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial q_n} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial q_n} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial \dot{q}_n} & \dots & \dots & \frac{\partial g_z}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Das Produkt  $\underline{G}\underline{\lambda}$  repräsentiert die Kraft, die das System (1) auf die durch (2) geforderte Bahn zwingt, sie heißt deshalb Zwangskraft. Die Komponenten des Vektors  $\underline{\lambda}$  sind die Lagrangeschen Parameter.

### 3. Numerische Integration der Lagrangeschen Gleichungen erster Art

Von den verschiedenen Möglichkeiten zur numerischen Integration der Lagrangeschen Gleichungen erster Art wird hier nur eine Variante skizziert.

Für ein Zeitintervall  $\tau$  der numerischen Integration von der Zeit  $t=t_1$  bis zur Zeit  $t=t_2=t_1+\tau$  werden die Komponenten von  $\underline{\lambda}$  als konstant betrachtet,

$$\underline{\lambda} = \underline{p} , \quad \frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{o} . \quad (5)$$

Mit geeigneten Zahlenwerten für  $\underline{p}$  kann dann (3) numerisch integriert werden, so daß

$$\underline{q}(\underline{p}, t_2),$$

$$\dot{\underline{q}}(\underline{p}, t_2)$$

zur Verfügung steht. Ebenfalls numerisch können Näherungswerte für die Änderung von  $\underline{q}$  und  $\dot{\underline{q}}$  beim Übergang von  $\underline{p}$  zu  $\underline{p}+\Delta\underline{p}$  errechnet werden [5],

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{q} \\ \Delta \dot{\underline{q}} \end{bmatrix} = \underline{Q} \Delta \underline{p} , \quad (6)$$

wobei man  $\underline{Q}$  aus folgender Gleichung bestimmt:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} \underline{M}^{-1} \underline{G} dt^2 \\ \int_{t_1}^{t_2} \underline{M}^{-1} \underline{G} dt \end{bmatrix} . \quad (7)$$

Schließlich wird die Bedingung

$$\underline{g}(\underline{q} + \Delta \underline{q}, \dot{\underline{q}} + \Delta \dot{\underline{q}}, t_2) = \underline{0} \quad (8)$$

linearisiert und mit Hilfe von (6) entsteht ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung von  $\Delta \underline{p}$ .

Mit

$$\underline{p} := \underline{p} + \Delta \underline{p} \quad (9)$$

liegt ein verbesserter Wertesatz für die Lagrangeschen Parameter vor mit denen (3) erneut integriert werden kann. Falls die Nebenbedingungen (2) nicht mit ausreichender Genauigkeit für die Zeit  $t_2$  erfüllt sind, also

$$|\underline{g}(t_2)| > \underline{\epsilon} \quad (10)$$

bei wählbarem  $\underline{\epsilon}$ , kann die Verbesserung von  $\underline{p}$  wiederholt werden. Erfahrungsgemäß bedarf es nur weniger solcher Iterationen. Ist dagegen

$$|\underline{g}(t_2)| \leq \underline{\epsilon} , \quad (11)$$

so wird die Zeitintegration fortgesetzt, wobei zweckmäßig als Startwert für  $\underline{p}$  der des letzten Integrationsschrittes genommen wird.

#### 4. Anwendungsbeispiel

Das in Bild 1 skizzierte Beispiel ist aus praktischer Fragestellung durch Vereinfachung entstanden. Es handelt sich um einen Dampferzeuger, dessen Abstützung an der Struktur des Reaktorgebäudes zum Zwecke der Optimierung studiert werden soll.

Das Abstützproblem wird aus den Bewegungsgleichungen herausgehalten, so daß diese extrem einfach sind:

$$\underline{M} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P-D \\ -mg \\ P h_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Der in Bild 1 skizzierten Stützung entsprechen die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}g_1 &= q_1 - h_3 q_3 = 0 && \text{(Abstützung in C)} \\g_2 &= q_1^2 + (q_2 - h_2)^2 - h_2^2 = 0 && \text{(Kreis um A).}\end{aligned}\tag{13}$$

Wenn auch für dieses einfache Beispiel die Herleitung verträglicher Bewegungsgleichungen nicht schwierig ist, so macht es doch den Vorteil des Verfahrens deutlich: Die durch (12) und (13) gegebenen Informationen können in dieser Form numerisch verarbeitet werden.

Bild 2 zeigt die Zwangskräfte in  $q_1$ - und  $q_3$ -Richtung, die Zwangskraft in Richtung  $q_2$  schwankt nur wenig um den dem Gewicht entsprechenden Wert. Die Bilder 3 und 4 stellen den tatsächlichen Verlauf der Nebenbedingungen  $g_1$  und  $g_2$  dar.

#### Literatur

- [1] Budó, A.                    Theoretische Mechanik, 7. Auflage. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974
- [2] Hamel, G.                    Theoretische Mechanik, Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1964
- [3] Joos, G.                      Lehrbuch der Theoretischen Physik, 10. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Frankfurt/Main 1959
- [4] Landau, L.D.                Lehrbuch der Theoretischen Physik, Teil I: Mechanik, Lifschitz, E.M.            5. Auflage. Akademie Verlag Berlin, 1967
- [5] Zeitner, W.                  Ein Verfahren zur numerischen Integration mechanischer Systeme mit Nebenbedingungen. Technische Universität Braunschweig, 1977

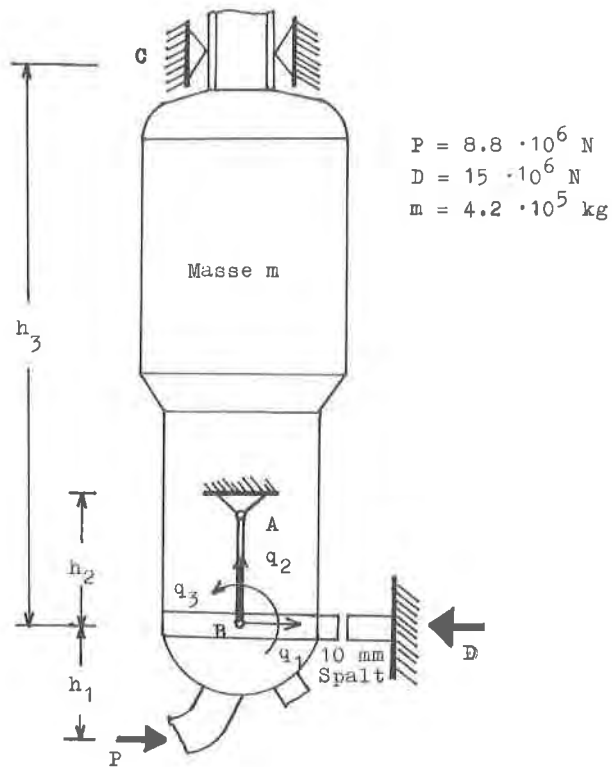


Bild 1: Anwendungsbeispiel, Stützkräfte am Dampferzeuger

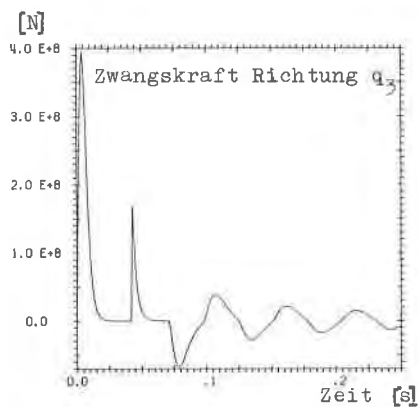
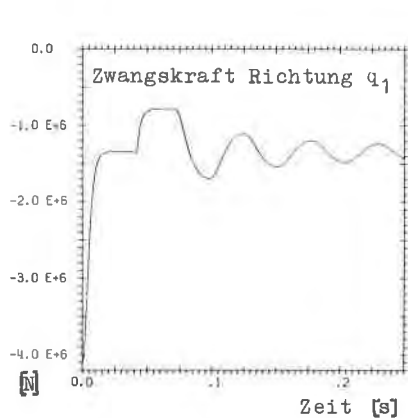


Bild 2: Zwangskräfte verursacht durch die Abstützung in B und C

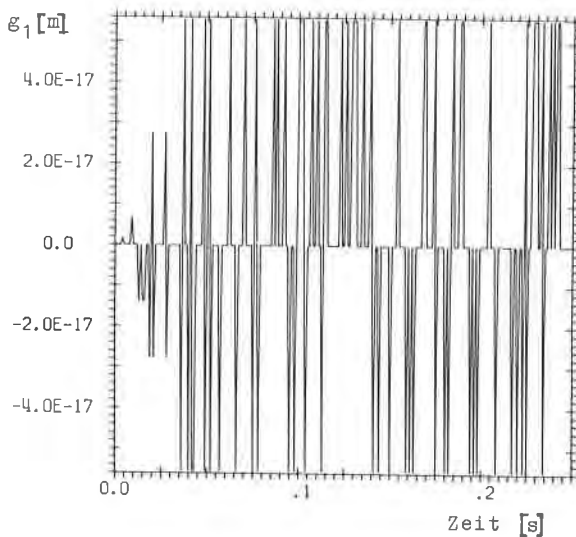


Bild 3: Verlauf der Nebenbedingung  $g_1$   
(entspricht Horizontalbewegung in C)

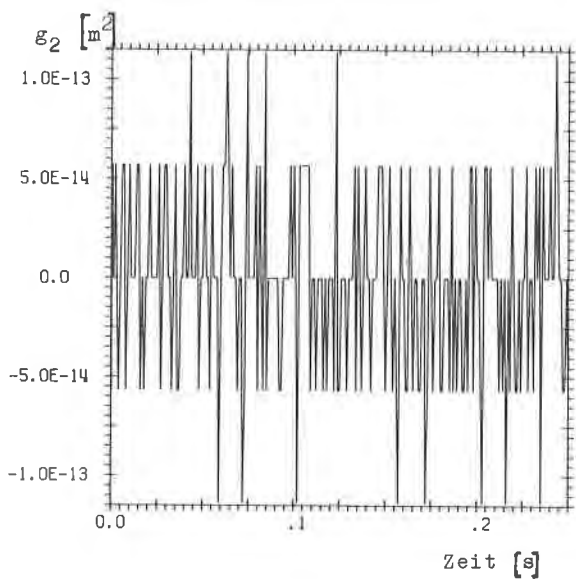


Bild 4: Verlauf der Nebenbedingung  $g_2$   
(entspricht dem Quadrat der Abweichung des Punktes B vom Kreis)