ON THEORY FOR ANISOTROPIC AND LAMINATED PLATES

M. GOTTELAND

Laboratoire Vibrations — Acoustique,
Institut National des Sciences Appliquées (I.N.S.A.), F-69621 Villeurbanne, France

SUMMARY

The analysis of dynamic response of anisotropic and laminated plates requires the knowledge of eigenvalues and eigenvectors. The use of variational principle is one of the more desirable methods for numerical solutions. A general functional for this problem is developed.

In the first part, a general formulation of the variational method for a global theory of anisotropic plates is derived by using the scheme of Pister and Sandhu. The plate is regarded as three-dimensional volume and the displacement field $u_i(x, y, z)$ is assumed to be linear in z. This synthesis permits to find again all existent functionals.

In the second part we expand a theory for multilayered plates. We consider the general functional of the three-dimensional problem. The continuity of the displacement field $u_i(x, y, z)$ is assumed a priori by using a piecewise continuous and linear function of z. The continuity of the shear stresses at the interfaces of the layers enter naturally.

The set of constitutive equations as derived from the functional in terms of u^k, Σ^k and M^k (stress resultants, stress couple in each layer).

This theory is similar to the theory of microstructure developed by Sun, Herrmann, Achenbach, but a general functional with several fields for solving numerical problems is achieved directly.

1. L'ensemble des théories pour l'étude des plaques composites multicouches a essentiellement deux aspects: théorie globale et théorie dite "continue".

1.1 Théorie globale: la plaque est considérée comme un matériau globalement aléotrope. On retrouve alors la même évolution que pour les plaques isotropes. a) Hypothèse de Love Kirchoff, ce qui donne une équation semblable à celle de Sophie Germain: une seule inconnue la flèche $w(x,y)$. Lekhnitskii |1| , Asthon et Waddoups |2| . b) Introduction du cisaillement et de l'inertie de rotation, 3 inconnues: $w(x,y)$ et les rotations $\gamma x(x,y)$ et $\gamma y(x,y)$: Wu et Winson |3| , Leissa |4| . c) Introduction des déformations planes $u(x,y)$, $v(x,y)$ dans les plaques élastiquement couplées: Stavsky |5| Whitney-Leissa |6| , Whitney Pagano |7| , Yang Norris - Stavsky |9| .

Il en ressort que le principe fondamental est de ramener l'étude à un problème bidimensionnel. Il nous a semblé intéressant de synthétiser dans un seul schéma ces développements en présentant l'étude d'une telle plaque comme l'approximation d'un problème tridimensionnel exprimé non pas sous une forme différentielle mais sous une forme énergétique.

1.2 Soit $J(v,\sigma)$ la fonctionnelle générale d'un problème d'élasticité. Pister-Sandhu |8|

$$J(\sigma,v) = \int_V \{v_i\, \sigma_{ij,j} - \sigma_{ij}\, v_{(i,j)} + 2\, Q(\sigma_{ij}) + 2\, v_i\, f_i\}\, dV$$

$$- \int_{S_1} v_i\, (\sigma_{ij} n_j - 2\hat{t}_i)\, dS + \int_{S_2} (v_i - 2\hat{v}_i)\, \sigma_{ij}\, n_j\, dS \qquad (1)$$

V volume de frontière $S = S_1 \cup S_2$

$\hat{t}_i$, $\hat{u}_i$ conditions aux limites sur S_1 et S_2

Les équations du problème sont obtenues par: grad(J) = o

$$\sigma_{ij,j} + f_i = o \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial Q(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = C_{ijk\ell}\, \sigma_{k\ell} = v_{(i,j)} = \frac{1}{2}\,(v_{i,j} + v_{j,i}) \qquad (2.2)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \hat{t}_i \quad \text{sur } S_1 \qquad (2.3)$$

$$v_i = \hat{v}_i \quad \text{sur } S_2 \qquad (2.4)$$

1.3 Hypothèses de calcul

Hypothèse géométrique sur V: V cylindre de base $C(x_1, x_2)$ (contour) de surface de base S, de génératrice parallèle à x_3, de hauteur h faible: $o \leq x_3 \leq h$.

Hypothèse de condition aux limites: sur les faces supérieures, $x_3 = h$, et inférieure $x_3 = o$, seules les contraintes peuvent être imposées.

Hypothèse cinématique: le champ $v_i(x_i)$ est de la forme

$$v_i\,(x_i) = u_i\,(x_\alpha) + z\, \psi_i\,(x_\alpha) \qquad (3)$$

$i,j = 1, 2, 3 \qquad \alpha,\beta = 1,2 \qquad x_3 \equiv z$

En portant l'éq. (3) dans l'éq. (1) on obtient $J^*(u, \psi, \Sigma, M)$

$$J^* = \int_S \{ u_i\, \Sigma_{i\alpha,\alpha} + \psi_i\, M_{i\alpha,\alpha} - 2\psi_i\, \Sigma_{3i} - u_{i,\alpha}\, \Sigma_{i\alpha} - \psi_{i,\alpha}\, M_{i\alpha} \} dS \qquad (4)$$

$$+ \int_S \{2\, Q^* (\Sigma,M) + 2u_i\, (\overline{f}_i + \overline{q}_i) + 2\psi_i\, (\overline{M}_i + \overline{m}_i)\}\, dS$$

$$- \int_{C_1} \{u_i\, (\Sigma_{i\alpha} n_\alpha - 2\, \hat{t}_i) + \psi_i\, (M_{i\alpha} n_\alpha - 2\, \hat{M}_i\, \} dC \qquad (4)$$

$$+ \int_{C_2} \{(u_i - 2\, \hat{u}_i)\, \Sigma_{i\alpha} n_\alpha + (\psi_i - 2\, \hat{\psi}_i)\, M_{i\alpha} n_\alpha\, \} dC$$

$$(\overline{f}_i, \overline{M}_i) = \int_o^h f_i\, (1,z)\, dz; \quad (\hat{t}_i, \hat{M}_i) = \int_o^h \hat{\tau}_i (1,z)\, dz$$

$$\Sigma_{ij} = \int_o^h \sigma_{ij}\, dz \qquad M_{i\alpha} = \int_o^h \sigma_{i\alpha} z\, dz$$

$$\overline{q}_i = \hat{\tau}_i(h) - \hat{\tau}_i(o) \qquad \overline{m}_i = h\, \hat{\tau}_i(h) \quad \text{donnés sur } C_1$$

$\hat{u}_i$ et $\hat{\psi}_i$ donnés sur C_2

1.4 <u>Calcul des énergies $Q^*(\Sigma,M)$, $W^*(e,\chi)$</u>

Soit $E_{ijk\ell}(x_i)$ et $C_{ijk\ell}(x_i)$ les lois de comportement globales de la plaque:

$$\sigma_{ij} = E_{ijk\ell}\, v(k,\ell) \quad \rightarrow \quad W\, |v(k,\ell)| \qquad (5)$$

$$v_{(i,j)} = C_{ijk\ell} \cdot \sigma_{k\ell} \quad \rightarrow \quad Q(\sigma_{k\ell}) \qquad (6)$$

Adoptons une écriture matricielle E,Ç pour $E_{ijk\ell}$ et $C_{ijk\ell}$, vectorielle pour σ_{ij} et $u_{(i,j)}$. Le calcul de W^* se fait de façon classique; rappelons les notations. L'éq. (3) entraîne:

$$v_{(i,j)} = e_{ij}(x_\alpha) + z\, \chi_{i\alpha}\, (x_\alpha) \qquad (7)$$

On porte l'éq. (7) dans l'éq. (5) et on intègre:

$$\begin{Bmatrix} \Sigma \\ M \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B^t & D \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

Avec A matrice (6,6), B matrice (6,5) obtenue en supprimant la ligne relative à $\chi_{33} = o$, B^t matrice transposée, D matrice (5,5) obtenue en supprimant la ligne et la colonne relative à $M_{33} = o$ et $\chi_{33} = o$.

e, Σ: vecteurs (1,6) associés à e_{ij} et Σ_{ij},χ et M vecteurs (1,5) associés à $\chi_{i\alpha}$ et $M_{i\alpha}$

$$(A_{pq}, B_{pq}, D_{pq}) = \int_o^h E_{pq}\, (1,\, z,\, z^2)\, dz \qquad (9)$$

Alors $W\,(e,\chi) = \langle e, Ae\rangle + 2\, \langle e, B\chi\rangle + \langle \chi, D\chi \rangle$ (10)

En pratique les E_{pq} sont tels que

$$E_{pq}\, (x_i) = E^k_{pq}\, (x_\alpha); \quad z_k \leq z \leq z_{k+1}$$

$$(A_{pq}, B_{pq}, D_{pq}) = \sum E^k_{pq} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (1,\, z,\, z^2)\, dz \qquad (11)$$

Pour obtenir $Q^*(\Sigma, M)$ il faut inverser l'éq. (8). Il n'est en général pas possible d'exprimer Q^* à partir des C^k_{pq} $|(E^k_{pq})^{-1}|$ de chaque couche. Ceci explique que les fonctionnelles utilisant Q^* sont peu employées.

1.5 Nous avons obtenu ainsi une fonctionnelle J^* fonction des 4 champs indépendants, u_i, ψ_i, Σ, M. Il est clair que l'on peut de la même manière établir une fonctionnelle générale utilisant W^* en fonction de 6 champs indépendants, u_i, ψ_i, e, χ, Σ, M. Nous ne reproduisons pas celle-ci mais le raisonnement et les calculs sont identiques. Remarquons que Σ_{ij}, $M_{\alpha\beta}$ ont la signification habituelle de résultantes et moments résultants, mais pas $M_{3\alpha}$. Il faudrait alors retenir une interprétation statistique de Σ et M.

Les théories classiques se retrouvent en particularisant le développement du champ $v_i(x_i)$:

$$\psi_3 = o, \quad \text{ou} \quad \psi_3 = o \quad \text{et} \quad \psi_\alpha = -(u_{3,\alpha} + \gamma_\alpha) \tag{12}$$

ce qui entraîne $\Sigma_{33} = M_{3\alpha} = o$.

En faisant dans l'éq. (12) $\gamma_\alpha = o$ (13) on retrouve l'hypothèse de Love-Kirchoff.

A partir de ces fonctionnelles générales, introduites à l'aide du schéma de Pister-Sandhu |8| , il est possible en utilisant la propriété de "symétrie" |8| , d'obtenir des formulations variationnelles plus classiques. Dans leur application aux éléments finis bon nombre d'entres elles ont été étudiées sous l'hypothèse de l'éq. Prager |10| Kikuchi-Ando |11| , Pianet Tong |12| , Les résultats s'étendent sans trop de difficulté à l'éq. (4).

2. Théorie continue

Dans les applications aux matériaux nouveaux, la théorie globale se révéla insuffisante, tout particulièrement pour rendre compte des phénomènes vibratoires. Les chercheurs ont tenté de mettre en évidence les interactions des différentes couches du matériau. Il semble que l'on puisse discuter deux types de théories. L'une présentée par Bedfort-Stern |13| Hegemier Gurtman |14| traduit le couplage par des termes intervenant comme des forces de volume, l'autre par Sun, Achenbach, Hermann, Cheng, Whitney |15 - 17| débouche sur la théorie des microstructures. Nous présentons une théorie semblable à cette dernière, ayant comme point de départ la formulation variationnelle de l'éq. (1).

2.1 Hypothèses de calcul:

Nous ferons les mêmes hypothèses sur la géométrie de V et sur les conditions aux limites que dans 1.3.

h_k épaisseur de la couche k: $h = \Sigma\, h_k$ (k=1, ..., n)

Nous aurons n-1 interfaces: les faces inférieures et supérieures sont repérées par l'indice o et n.

Hypothèses aux interfaces:

H1 Continuité des déplacements

H2 Continuité des contraintes

Nous traduisons H1 en approchant $v_i(x_i)$ par un champ continu linéaire par morceau de pas h_k, soit:

$$v_i(x_\alpha, z) = u_i(x_\alpha, z_k) + \frac{z-z_k}{h_k} \left| u_i(x_\alpha, z_{k+1}) - u_i(x_\alpha, z_k) \right|$$

$$z_k \leq z \leq z_{k+1} \; ; \quad k = o \ldots n-1 \qquad z_o = o \tag{14}$$

$$\text{Notons pour simplifier: } v_i = u_i^k + \frac{z-z_k}{h_k}(u_i^{k+1} - u_i^k) \tag{15}$$

On porte l'éq. (15) dans l'éq. (1). L'hypothèse H2, se traduira dans le calcul sur chaque interface k par $\sigma_{i3}(x_\alpha, z_{k-}) = \sigma_{i3}(x_\alpha, z_{k+})$. On obtient une fonctionnelle Jo.

$$Jo = \sum_k \int_S \{h_k u_i^k \Sigma^k_{\alpha i,\alpha} + (u_i^{k+1} - u_i^k) M^k_{\alpha i,\alpha} - \Sigma^k_{i\alpha} h_k u^k_{i,\alpha} - M^k_{i\alpha}(u^{k+1}_{i,\alpha} - u^k_{i,\alpha}) \tag{16}$$

$$
- 2\Sigma^k_{3i}\,(u_i^{k+1} - u_i^k) + 2Q_k + 2(u^n\hat{\tau}^n - u_i^o\hat{\tau}_i^o) + 2T^k \,\}dS
$$

$$
- \sum_k \int_{C_1} \{ h_k\, u_i^k\, (\Sigma^k_{\alpha i} n_\alpha - 2\hat{\tau}_i^k) + (u_i^{k+1} - u_i^k)\,(M^k_{\alpha i} n_\alpha - 2\hat{M}_i^k)\}\, dC_k
$$

$$
+ \sum_k \int_{C_2} \{ h_k\, \Sigma^k_{\alpha i} n_\alpha\, (u_i^k - 2\hat{u}_i^k) + M^k_{i\alpha} n_\alpha \,|\, (u_i^{k+1} - u_i^k) - 2(\hat{u}_i^{k+1} - \hat{u}_i^k)|\}\, dC_k \qquad (16)
$$

$$
\Sigma^k_{ij} = \frac{1}{h_k}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_{ij}\, dz; \qquad M^k_{\alpha i} = \frac{1}{h_k}\int_{z_k}^{z_{k+1}} (z-z_k)\,\sigma_{ij}\, dz
$$

$$
T_k = h_k F_i^k\, u_i^k + (u_i^{k+1} - u_i^k)\, M_i^k \qquad \text{cas statique avec} \qquad (17)
$$

$$
\overline{F}_i^k = \frac{1}{h_k}\int_{z_k}^{z_{k+1}} f_i\, dz; \qquad \overline{M}_i^k = \frac{1}{h_k}\int_{z_k}^{z_{k+1}} (z - z_k)\, f_i\, dz
$$

$$
- 2T_k = \omega^2\, \frac{h_k m_k}{3}\, \{(u_i^k)^2 + u_i^{k+1} u_i^k + (u_i^{k+1})^2\} \qquad \text{cas dynamique stationnaire} \qquad (18)
$$

2.2 Calcul de l'énergie complémentaire Q_k : première méthode

Soit $E^k = (C^k)^{-1}$ alors $\sigma^k = E^k\,\varepsilon^k$ (19)

Les hypothèses sur $u_i \to \varepsilon^k$ au plus linéaire en z: $\varepsilon^k = e^k + \dfrac{z-z_k}{h_k}\,\chi^k$ (20)

On porte l'éq. (20) dans l'éq. (19). On intègre et on résoud le système en e^k, χ^k. On obtient:

$$
\begin{vmatrix} e_k \\ \chi'_k \end{vmatrix} = C^k \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Sigma^k \\ \dfrac{M^k}{h_k} \end{vmatrix} \quad (21), \quad \varepsilon^k = C^k\{(4\Sigma^k - 6\frac{M^k}{h_k}) + \frac{(z-z^k)}{h_k}\,(\frac{12M^k}{h_k} - 6\Sigma^k)\} \qquad (22)
$$

On calcule $2Q_k$ en formant le produit scalaire.

$$
2Q_k = 4\langle\Sigma^k, C^k\,\Sigma^k\rangle - \frac{12}{h_k}\langle\Sigma^k, C^k M^k\rangle + \frac{12}{h_k^2}\langle M^k, C^k M^k\rangle \qquad (23)
$$

Deuxième méthode: si E^k ne dépend pas de z, σ^k est au plus linéaire en z. La répartition de σ^k est connue par Σ^k et son moment M^k. on écrit ces égalités en posant:

$\sigma^k = A + \dfrac{(z-z_k)}{h_k} \cdot B$ (24). On résoud le système, il vient

$$
\sigma^k = (4\Sigma^k - 6\,\frac{M^k}{h_k}) + \frac{(z-z_k)}{h_k}\,(12\,\frac{M^k}{h_k} - 6\Sigma^k) \qquad (25)
$$

$$
2h_k\, Q_k = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \langle\sigma^k, C^k\,\sigma^k\rangle\, dz = h_k\,\{ 4\langle\Sigma^k, C^k\Sigma^k\rangle - \frac{12}{h_k}\langle\Sigma^k, C^k M^k\rangle + \frac{12}{h_k^2}\langle M^k, C^k M^k\rangle\} \qquad (26)
$$

Remarque: si on considère le cas particulier à une couche avec le plan de référence plan médian on obtient après changement de variable:

(22) $\rightarrow$ $\varepsilon = C \{ \Sigma + z \frac{12}{h^2} M \}$ (27)

(23) $\rightarrow$ $\int_V 2Q dV = \int_S | <\Sigma, C\Sigma> + \frac{12}{h^2} <M, CM> | \; h \, dS$ (28)

(24) $\rightarrow$ $\sigma = \Sigma + \frac{12}{h^2} M$ (29)

Expression classique de la théorie des plaques pour ε et σ .

Dans (28), si on néglige la correction des deux termes Σ_{33}, $M_{\alpha 3}$ on retrouve l'énergie complémentaire avec effets de tensions, de flexion et de cisaillement.

2.3 Equation du problème traité: en calculant les variations, on obtiendra les équations d'équilibre ou de mouvement et les équations constitutives.

$$k = 1, N-1, \Sigma^k_{\alpha i,\alpha} - \frac{M^k_{\alpha i,\alpha} - M^{k-1}_{\alpha i,\alpha}}{h_k} + \frac{\Sigma^k_{3i} - \Sigma^{k-1}_{3i}}{h_k} = - \overline{F}^k_i + \frac{\overline{M}^k_i - \overline{M}^{k-1}_i}{h_k} \quad \text{(statique)} \quad (30)$$

$$= \omega^2 \{ m_k \left(\frac{u^k_i}{3} + \frac{u^{k+1}_i}{6}\right) + m_{k-1} \frac{h_{k-1}}{h_k} \left(\frac{u^k_i}{3} + \frac{u^{k-1}_i}{6}\right) \} \quad \text{(dynamique)}$$

$$k = o; \quad \Sigma^o_{\alpha i,\alpha} - \frac{M^o_{\alpha i,\alpha}}{h_o} + \frac{\Sigma^o_{3i}}{h_o} = \begin{cases} \dfrac{\hat{\tau}^o_i}{h_o} - \overline{F}^o_i - \dfrac{\overline{M}^o_i}{h_o} & \text{(statique)} \\ \omega^2 m_o \left(\dfrac{u^o_i}{3} + \dfrac{u^1_i}{6}\right) & \text{(dynamique)} \end{cases} \quad (31)$$

$$k = n; \quad \frac{M^{n-1}_{\alpha i,\alpha} - \Sigma^{n-1}_{3i}}{h_{n-1}} = \begin{cases} \dfrac{-\hat{\tau}^n_i - \overline{M}^{n-1}_i}{h_{n-1}} & \text{(statique)} \\ \omega^2 m_{n-1} \left(\dfrac{u^{n-1}_i}{6} + \dfrac{u^n_i}{3}\right) & \text{(dynamique)} \end{cases} \quad (31)$$

La loi de comportement par couche nous redonne une expression développée de l'éq. (21).

Nous n'avons reproduit ici que la fonctionnelle générale dépendant de Q énergie complémentaire.

Les mêmes calculs peuvent être faits sur la fonctionnelle générale à trois champs de variables v_i, σ_y, ε_{ij} de Sandhu et Pister |8| .

2.4 En conclusion l'étude sous une forme variationnelle a permis d'introduire aux interfaces la continuité des contraintes. La continuité des déplacements se traduit par un couplage entre les variables d'indices k et k+1.

La théorie globale peut apparaître comme un cas particulier dans lequel on considère une seule couche k = 0,1. Les équations s'obtiennent en combinant l'éq. (31).

Dans le cas général l'examen des équations (30-31) se rapproche d'une forme discrétisée des équations des milieux à couple de contrainte, ou de microstructure, théorie vers laquelle semble conduire l'étude des matériaux composites.

|1| LEKHNITSKII,S.G., "Anisotropic plates" - Gordon and Breach 1968.

|2| ASTHON, WADDOUPS, "Analysis of anisotropic plates" - J. composite Materials - 3 janvier 1969 - 3 juillet 1969 - 4 avril 1970.

|3| WU,C.I.; VINSON,J.R., "On the free vibrations of plates and beams of pyrolitic graphite type materials" - A.I.A.A. - 55 - 1969.

|4| LEISSA, A.W., "Vibrations of plates" - NASA - SP 160.

|5| STAVSKY, Y., "Bending and stretching of laminated aelotropic plates" - J. Eng. Mech.D. - A.S.C.E. 87EM6 - 1961.

|6| WHITNEY, J.M., LEISSA, A.W., "Analysis of heterogeneous anisotropic plates" - J.A.M. - 36,N°2 1969.

|7| WHITNEY, J.M., PAGANO, N.J., "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates" - J.A.M. 37,N°4 - Décembre 1970.

|8| SANDHU, R.S., PISTER, K.S., "Variational principles for boudary value and initial boundary value problems in continuum mechanics" Int. J. Solids Structures - 7 - 1971.

|9| YANG, P.C., NORRIS, C.H., STAVSKY, Y., "Elastic wave propagation in heterogeneous plates Int. J. Solids Structures, 2, 1966.

|10| PRAGER, X., "Variational principles for elastic plates with relaxed continuity requirements", Inter. J. Solids Structues, 4, 1968.

|11| KIKUCHI, F., ANDO, Y., "A new variational function for the finite element method and its application to plate and shell problems" Nuclear eng. and design , 21, 1972.

|12| PIAN, T.H.H.,PIN TONG, "Finite element methods in continuum mechanics" 1972 .

|13| STERN, M., BEDFORD, A., "Wave propagation in elastic laminates using a multi-continuum theory" Acta-Mech. , 15, 1972.

|14| HEGEMIER, G.A., GURTMAN, G.A., NAYFEH, A.H., " A continuum mixture theory of wave propagation in laminated and fiber reinforced composites" , Int. J. Solids Structures, 9, 1973.

|15| SUN, C.I. , HERRMANN, G., ACHENBACH, J.D., J.A.M. , Sep. 1968, dec. 1968.

|16| SUN, C.I., CHENG, N.C., "On the gouverning equations for a laminated plate", J. Sound vibrations , 8, Novb. 1971.

|17| SUN, C.I., WHITNEY, J.M., - A.I.A.A. ASME Avril 1973.