

**DIE SPANNUNGSÄHNLICHE BEHANDLUNG VON  
GERISSENEM BRENNSTOFF BEI MECHANISCHER  
WECHSELWIRKUNG DURCH LEISTUNGSRAMPEN  
MIT DER HÜLLE VON LWR-BRENNSTÄBEN**

F. DEPISCH, D. GÖBEL, K. GUSE

*Fachbereich Kernreaktoren,  
Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, AEG-Telefunken, D-6 Frankfurt a.M. 70, Germany*

H. ELBEL

*Institut für Materialforschung,  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, D-75 Karlsruhe, Germany*

**SUMMARY**

To calculate mechanical interaction caused by power ramps in LWR, especially in BWR fuel rods, it was necessary to modify the fuel pin modeling code SATURN-1, which was originally developed for fast breeder fuel.

The fuel in SATURN-1 was treated as a hollow cylinder, because of the simplicity of boundary conditions. The assumption of the fuel being a hollow cylinder is not valid for LWR fuel rods as generally there exists no central channel formed by pore migration (typically for fast breeder fuel). The absence of a central channel in LWR-fuel is caused by the lower temperatures and temperature gradients as compared to fast breeder fuel. Regarding a cylinder without a hole, the difficulty is the following: For the axisymmetric stress condition the equilibrium equation has a singularity at the center of the fuel. This difficulty has been eliminated by the following boundary condition: The derivation of the radial stress component becomes zero at a very small but from zero different radius. The numerical results obtained with this boundary condition proved to be adequate for the description of BWR fuel behaviour.

In the majority of power conditions in BWR fuel the presence of cracks has to be taken into consideration in calculating the mechanical interaction. The fuel is therefore treated as a three zone model with respect to stress distribution: The central zone can become hydrostatic, the bridging zone, where all cracks are healed up, and the outward cracked zone consists of rigid pieces with free heat- and swelling expansion.

The cladding is in interaction with the bridging zone in the fuel by use of two boundary conditions. The numerical results show up that not alone the size of the power ramp determines the deformation of the cladding but also the steady state power level. The steady state power level influences as well the distribution of the cracks and therefore the stiffness of the fuel, as the ability of stress relaxation in the fuel.

It is demonstrated that the amount of mechanical interaction depends strongly on whether the axial expansion of the fuel is free or not. The casing is loaded by additional forces in axial direction in the case of locked fuel compared to sliding fuel. Boundary conditions for locked and sliding fuel were established in the code. The calculation yielded that with sliding fuel the stresses are reduced in the cladding by mechanical interaction almost to the half as compared to locked fuel. The LWR-version of the fuel pin modelling code SATURN-1 has proven its ability to describe the stress and strain distribution caused by power ramps.



## 1. Einleitung

Am Rechenprogramm SATURN, welches entwickelt wurde für Schnellbrüterbrennstäbe, sind Modelländerungen vorgenommen worden, um das Rechenprogramm auch für SWR-Brennstäbe anwenden zu können.

Da im Siedewasserreaktor der Brennstoff relativ kalt ist und damit weit weniger häufig als beim Schnellen Brüter hydrostatische Zonen auftreten, ist es notwendig, mit vollzylindrischem und nicht mit hohlzylindrischem Brennstoff mechanisch zu rechnen.

Es ist ebenfalls nicht zu erwarten, daß der Brennstoff, wenn er mit der Hülle in Kontakt kommt, alle seine Risse ausgeheilt hat, dafür sind die Brennstoffrandzonen viel zu kalt. Daher muß man für Siedewasserreaktoren ein Rißmodell haben, daß auch im Kontakt die gerissenen Zonen mechanisch berücksichtigt.

Das Rechenprogramm SATURN berechnet den Spannungszustand von Hülle und Brennstoff, bedingt durch mechanische Wechselwirkung, über die Lösung eines Rand- und Übergangswertproblems, unter Zugrundelegung eines axial-symmetrischen Spannungszustandes und des Ebenbleibens der Querschnitte. Beim achsensymmetrischen Spannungszustand treten nur zwei Verschiebungen auf, die Radialverschiebung  $U = U(r)$  und die Axialverschiebung  $W = W(z)$ . Die Axialverschiebung ist gekennzeichnet durch eine Differentialgleichung erster Ordnung  $\frac{dW}{dz} = \text{konst}$  und die Radialverschiebung läßt sich durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung beschreiben. Das bedeutet, daß für eine eindeutige Lösung der Differentialgleichungen drei Randbedingungen vorzugeben sind. Bei mechanischer Wechselwirkung werden die Differentialgleichungen für jeden Körper gesondert gelöst, hier sind also für eine eindeutige Lösung sechs Randbedingungen vorzugeben.

## 2. Die Formulierung der Randbedingungen bei mechanischer Wechselwirkung

Die Randbedingungen können natürlich nicht beliebig gewählt werden, sondern sie müssen die mathematische Abstraktion mit der physikalischen Realität verbinden. Das Verhalten des Gesamtkörpers ist also eindeutig durch die Bedingungen an seinen Randzonen vorbestimmt. Durch Änderung der Randbedingungen kann man das unterschiedliche Verhalten des Gesamtkörpers simulieren. In dieser Arbeit soll das an drei Beispielen deutlich gemacht werden

- a) Unterschied Hohl- und Vollzylinder
- b) gerissener Brennstoff in Kontakt mit der Hülle
- c) haftender und gleitender Brennstoff.

Bei dem achsensymmetrischen Spannungszustand gelingt es die Differentialgleichungen, auch mit bleibenden Verformungen relativ leicht zu integrieren [1] und [2] und man erhält bei mechanischer Wechselwirkung sechs freie Konstanten, die durch entsprechende Randbedingungen bestimmt werden können. Die Bestimmung geschieht mit Hilfe eines linearen inhomogenen

Gleichungssystems der Form:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & \dots & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die  $a_{ik}$  sind Konstanten bestehend aus den elastischen Eigenschaften und den Randgeometrien der Körper, die  $c_i$  sind die zu bestimmenden Integrationskonstanten, die  $b_i$  sind die Randbedingungen in einer spezifisch ausgedrückten Form. Das Problem der mechanischen Wechselwirkung besteht nun darin, die Koeffizienten  $b_i$  oder wenn sich die Randgeometrie in bezug auf die Randbedingungen ändert auch die  $a_{ik}$ , so zu bestimmen, daß der gewünschte physikalische Effekt erreicht wird.

### 3. Voll- und Hohlzylinder

Die Differentialgleichung der Radialverschiebung hat die Form

$$r^2 U'' + r U' - U = f(\epsilon_{th}, \epsilon_{bl}) \cdot r^2 \quad (2)$$

Dies ist eine Eulersche Differentialgleichung, die für  $r = 0$  die Trivialsolution  $U = 0$  hat. Da  $U = 0$  eine, wenn auch triviale, allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist, kann  $U = 0$  nicht mehr als Randbedingung verwendet werden.

Die Verträglichkeitsbedingung für die Tangentialdehnung lautet  $\epsilon_\theta = \frac{U}{r}$

Im Punkt  $r = 0$  ist  $\epsilon_\theta$  also unbestimmt. Das führt zu der allgemeinen Aussage, daß die Lösungen des achsensymmetrischen Problems nur in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet, das den Punkt  $r = 0$  ausschließt, eindeutig sind. Daher werden unter achsensymmetrischen Bedingungen im allgemeinen nur Hohlzylinder behandelt. Die Randbedingungen mit mechanischer Wechselwirkung lauten dann: (siehe Abb. 1)

$$\begin{aligned}
 \partial_r(r = r_{bi}) &= -p_i && \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{Randbedingung} \\
 \partial_r(r = r_{ha}) &= -p_a && \\
 \partial_r(r_{ba}) &= \partial_r(r_{hi}) && \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{Übergangsbedingung} \\
 U(r_{ba}) &= U(r_{hi}) && \\
 \epsilon_{zB} &= \epsilon_{zH} && \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{axiale Haftbedingung} \\
 2\pi \int_{r_{bi}}^{r_{ha}} \partial_z \cdot r dr &= \pi (p_a r_{ha}^2 - p_i r_{hi}^2) && \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{axiale Kraftbedingung}
 \end{aligned}$$

Der Kontaktdruck ist dann

$$p_c = -\partial_r(r_{ba}) - p_i \quad (3)$$

Ein Vollzylinder hat keinen von außen aufgeprägten Innendruck, so daß man für  $\partial_r(r = r_{bi}) = -p_i$  eine andere Bedingung finden muß. Diese neue Bedingung muß für den Fall  $r \neq 0$  aber  $r \rightarrow 0$  den Vollzylinder simulieren, da, wie oben gezeigt wurde,  $r = 0$  für den achsensymmetrischen Lösungsmechanismus ausgeschlossen ist.  $U = 0$  ist schon eine Trivialsolution für die Differentialgleichung der Verschiebung, also als zusätzliche Bedingung nicht mehr ver-

4. Gerissener Brennstoff im Kontakt Hülle - Brennstoff

Zur Beschreibung der mechanischen Wechselwirkung sind an der Kontaktstelle Hülle - Brennstoff zwei Übergangsbedingungen notwendig, um einen stetigen Anschluß der Spannungen und Verschiebungen zu ermöglichen. Diese Übergangsbedingungen sind nicht unbedingt an der Kontaktstelle zu formulieren, denn es ist mathematisch gleich zu sagen, bei  $r=r_a$  sei  $\delta r = \delta r_a$  und bei  $r=r_b$  sei  $\delta r = \delta r_b$ , wenn man nur sicherstellt, daß, wenn  $r=r_b$   $\delta r = \delta r_b$  ist, dann auch bei  $r_a=r$   $\delta r = \delta r_a$  sein muß. Dies nützt man bei der Formulierung der Übergangsbedingungen bei gerissenem Brennstoff im Kontakt mit der Hülle aus (siehe Abb. 2).

Im Rechenprogramm SATURN 1 [3] wird der Brennstoff als Dreizonenmodell behandelt. Die Zone III ist die innerste und hydrostatische Zone, hieran schließt sich die Zone II an, die unter den Rand- und Übergangsbedingungen spannungsmäßig (achsensymmetrisch) behandelt wird, hierauf folgt die äußerste Zone I, die Zone der Risse. Die Rißzone wird als starr angenommen, doch fähig thermische- und Schwelldehnung auszuführen. Die Zone I leitet also nur Spannungen durch, somit existiert eine eindeutige Spannungskorrelation zwischen der Radialspannungen am Außenradius der Zone II, an dem die Übergangsbedingungen für den Brennstoff formuliert werden und der Radialspannung am Innenradius der Hülle, an dem die Übergangsbedingungen für die Hülle formuliert werden. Für die Verschiebungen lautet dann die Übergangsbedingung 
$$U(r=r_{Hi}) = U(r=r_2) + U_0 \quad (7)$$

$r_2$  ist der Außenradius der ungerissenen Zone;  $U_0$  ist die Eigenausdehnung der Rißzone.

Für die Radialspannung lautet die Übergangsbedingung (siehe Abb. 3).

Aus Gleichgewichtsgründen gilt:

$$p_{Hi} \cdot r_{Hi} \cdot \bar{\alpha} = p_2 \cdot r_2 \cdot \bar{\alpha} \quad \gamma \quad \frac{p_{Hi}}{p_2} = \frac{r_2}{r_{Hi}}$$

Also: 
$$\delta r(r=r_{Hi}) = \delta r(r=r_2) \cdot \frac{r_2}{r_{Hi}} \quad (8)$$

Da über den Spannungsverlauf in der Rißzone selbst keine Aussage gemacht wird, wird auch die axiale Kraftgleichgewichtsbedingung so umformuliert, daß sie sich nur auf solche Zonen bezieht, in denen der Spannungsverlauf auch berechnet wird.

Die axiale Kraftgleichgewichtsbedingung lautet dann:

$$2\pi \left( \int_{r_{Hi}}^{r_a} \delta_z r dr + \int_{r_b}^{r_2} \delta_z r dr \right) = -\pi \left[ (p_a r_{Ha}^2 - p_i r_{Hi}^2) - (r_2^2 - r_b^2) p_i \right] \quad (9)$$

Diese drei Bedingungen werden nach dem oben gezeigten Muster in den Berechnungsgang nach [1], [2] eingefügt und man erhält Gleichungen zur Bestimmung der  $c_i$  und damit der  $a_{ik}$  und der  $b_i$  für das lineare Gleichungssystem.

Damit ist der mechanische Teil zur Behandlung des gerissenen Brennstoffs abgeschlossen. Im Rißmodell ist weiterhin vorgesehen, daß die Risse ausheilen können, wenn das Rißvolumen im Kontakt durch Temperatur- oder

fügar. Als Lösung bietet sich an, an der Stelle  $r \rightarrow 0$  die Bedingung  $\frac{d\delta r}{dr} = 0$  zu benutzen, und zwar aus folgendem Grund.

Die Gleichgewichtsbedingung des achsensymmetrischen Spannungszustandes lautet

$$\frac{d\delta r}{dr} + \frac{\delta r - \delta \theta}{r} = 0 \quad (4)$$

Für  $\frac{d\delta r}{dr} = 0$  kann diese nur befriedigt werden, wenn  $\delta r = \delta \theta$

d.h. aber auch  $\epsilon_r = \epsilon_\theta$  ist. Damit ist aber für  $r \rightarrow 0$  bei  $\epsilon_\theta = \frac{4}{r} \epsilon_0$  fest vorgegeben und nicht mehr beliebig wie es oben war.

Nach [1] und [2] gilt:

$$\delta r = E \left[ -\frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r \alpha \cdot \bar{T} \cdot r dr + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \int_{r_i}^r \frac{\epsilon_{rc} - \epsilon_{\theta c}}{r} dr - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r (\epsilon_{rc} + \epsilon_{\theta c}) r dr \right. \\ \left. + \frac{C_1 + \nu C_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{C_2}{(1+\nu)r^2} \right]$$

Damit:

$$\frac{d\delta r}{dr} = E \left[ -\frac{1}{1-\nu} \left( -\frac{2}{r^3} \int_{r_i}^r \alpha \cdot \bar{T} \cdot r dr + \frac{1}{r^2} (\alpha \cdot \bar{T} \cdot r) \right) + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{\epsilon_{rc} - \epsilon_{\theta c}}{r} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu^2)} \left( -\frac{2}{r^3} \int_{r_i}^r (\epsilon_{rc} + \epsilon_{\theta c}) r dr + \frac{1}{r^2} (\epsilon_{rc} + \epsilon_{\theta c}) r \right) + \frac{2C_2}{(1+\nu)r^3} \right]$$

Für  $r \rightarrow r_i$  mit  $r_i \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow r_i} \frac{d\delta r}{dr} = 0 = \lim_{r \rightarrow r_i} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{1-\nu} \int_{r_i}^r \alpha \bar{T} r dr + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu^2)} \int_{r_i}^r (\epsilon_{rc} + \epsilon_{\theta c}) r dr + \frac{C_2}{1+\nu} \right] \frac{2}{r^2} - \left( \frac{1}{1-\nu} \alpha \bar{T} - \frac{1}{2(1-\nu)} (\epsilon_{rc} - \epsilon_{\theta c}) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_{rc} + \epsilon_{\theta c}) \right) \right\}$$

$$\text{Also: } C_2 = \frac{r_i^2}{2} \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \bar{T} - \frac{1}{2(1-\nu)} (\epsilon_{rc} - \epsilon_{\theta c}) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_{rc} + \epsilon_{\theta c}) \right) \quad (6)$$

Damit sind dann die  $a_{ik}$  und  $b_i$  ermittelt, um die Randbedingung  $\frac{d\delta r}{dr} = 0$  an die Stelle des linearen Gleichungssystems zu setzen, wo früher die Randbedingung  $\delta r(r_i) = -p_i$  stand.

Mit der Randbedingung  $\frac{d\delta r}{dr} = 0$  sind wir in der Lage, mit  $\gamma = 0,005$ , also praktisch vollzylindrischem Brennstoff, zu rechnen, ohne daß es zu numerischen Schwierigkeiten kommt oder  $\epsilon_\theta$  über alle Grenzen hinauswächst.

Schwelldehnung aufgezehrt ist. Weiterhin ist es aber auch möglich, daß der Brennstoff bei Überschreiten einer bestimmten tangentialen Zugspannung wieder aufreißen kann.

### 5. Haften und Gleiten

Bei mechanischer Wechselwirkung sind Hülle und Brennstoff radial und tangential miteinander verkoppelt, dies findet seinen Ausdruck in den Übergangsbedingungen. In axialer Richtung tritt eine Kopplung nur für den Fall des Haftens auf. Für diesen Fall stellt die Bedingung  $\epsilon_{ZH} = \epsilon_{ZB}$  eine echte Übergangsbedingung dar. Die Kopplung zwischen Hülle und Brennstoff im Haftfall läßt sich deutlich darstellen, wenn man die Kraftverhältnisse in axialer Richtung studiert: (siehe Abb. 4).

Es gilt

$$F_{ZH} + H + \bar{\pi} \gamma_{Hi}^2 \cdot \rho_i - \bar{\pi} \gamma_{Ha}^2 \rho_a = 0$$

$$F_{ZB} - H - \bar{\pi} (\gamma_{Ba}^2 - \gamma_{Bi}^2) \rho_i = 0$$

Beide Gleichungen sind über H direkt gekoppelt und können deshalb zusammengefaßt werden (im Kontaktfall ist  $\gamma_{Ba} = \gamma_{Hi}$ )

$$F_{ZH} + F_{ZB} - \bar{\pi} (\rho_a \gamma_{Ha}^2 - \rho_i \gamma_{Bi}^2) = 0$$

$$F_{ZH} + F_{ZB} = 2\bar{\pi} \int_{\gamma_{Bi}}^{\gamma_{Ha}} \beta_z r dr$$

Das führt dann zu der bekannten Gleichung [2]

$$2\bar{\pi} \int_{\gamma_{Bi}}^{\gamma_{Ha}} \beta_z r dr = \bar{\pi} (\rho_a \gamma_{Ha}^2 - \rho_i \gamma_{Bi}^2) \quad (10)$$

Würde man die Haftkraft H kennen, benötigte man nicht die Forderung

$\epsilon_{ZH} = \epsilon_{ZB}$ , denn die direkte Kopplung würde über zwei obigen Gleichungen hergestellt. Im Fall des Gleitens sind Brennstoff und Hülle axial völlig voneinander entkoppelt. Das bedeutet, die Haftkraft H ist gleich Null, damit werden die obigen zwei Gleichungen entkoppelt und zu zwei voneinander getrennt existierenden Gleichungen. Daraus folgt sofort, daß  $\epsilon_{ZH} \neq \epsilon_{ZB}$  sein muß; es sind also wieder sechs Randbedingungen vorhanden.

Im Fall des Gleitens lauten die zwei Axialbedingungen:

Hülle  $2\bar{\pi} \int_{\gamma_{Bi}}^{\gamma_{Ha}} \beta_z r dr = \bar{\pi} (\rho_a \gamma_{Ha}^2 - \rho_i \gamma_{Hi}^2)$

Brennstoff  $2\bar{\pi} \int_{\gamma_{Bi}}^{\gamma_{Ba}} \beta_z r dr = \bar{\pi} (\gamma_{Ba}^2 - \gamma_{Bi}^2) \rho_i$  (11)

Damit ist auch das Problem des Haftens und Gleitens von der Mechanik her gelöst.

### 6. Beispielrechnungen

Die Abbildungen 5 und 6 zeigen die unterschiedliche Auswirkung von gerissenen und ungerissenen Brennstoff auf die Brennstabhülle. Man sieht, daß durch die Selbstbehinderung des ungerissenen Brennstoffs die Belastung der Hülle durch den Brennstoff geringer ist, als wenn der Brennstoff in gerissener Form mit der Hülle in Wechselwirkung tritt.

Abb. 7 zeigt den Radialspannungsverlauf bei haftendem und gleitendem

Brennstoff. Deutlich zu erkennen ist, daß der Kontaktdruck bei haftendem Brennstoff größer ist als bei gleitenden. (Bei vollzylindrischem Brennstoff ist der Kontaktdruck gleich der Radialspannung am Hülleninnenrand.) Weiterhin sieht man, daß bei Spannungsrelaxation ( $t = 100$  h), d.h., starkes Absinken des Kontaktdruckes, sich haftender und gleitender Brennstoff einander angleichen.

Quellenangabe

- [1] GUYETTE, M., Crash a Computer Code for the Analysis of Creep and Plasticity in Fuel Pin Sheaths, KFK 1050, Karlsruhe 1969
- [2] KÄMPF, H., ELBEL, H., DEPISCH, F., Das Rechenprogramm SATURN 1a für Brennstäbe, KFK 1575, Karlsruhe 1972
- [3] GÖBEL, D., Die Anpassung von SATURN 1 an SWR-Bedingungen, in Vorbereitung

Formelzeichen

- U = Radialverschiebung
- W = Axialverschiebung
- $E_{th}$  = thermische Dehnung
- $E_{bl}$  = bleibende Dehnung
- $E_{\theta}$  = Tangentialdehnung (totale)
- $E_r$  = Radialdehnung (totale)
- $E_{zB}$  = totale axiale Brennstoffdehnung
- $E_{zH}$  = totale axiale Hülldehnung
- r = Radius
- $r_{Ma}$  = Hüllaußenradius
- $r_{Hi}$  = Hüllinnenradius
- $r_{Ba}$  = Brennstoffaußenradius
- $r_{Bi}$  = Brennstoffinnenradius
- $r_e$  = Außenradius der ungerissenen Zone
- $p_i$  = Gasinnendruck
- $p_a$  = Außendruck des Kühlmittels
- $p_c$  = Kontaktdruck
- $\sigma_r$  = Radialspannung
- $\sigma_{\theta}$  = Tangentialspannung
- $\sigma_z$  = Axialspannung
- $u' = \frac{\partial u}{\partial r}$
- $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$
- $\hat{\alpha}$  = Bogenmaß
- $F_{zH}$  = Axialkraft in der Hülle
- $F_{zB}$  = Axialkraft in dem Brennstoff
- H = Haftkraft



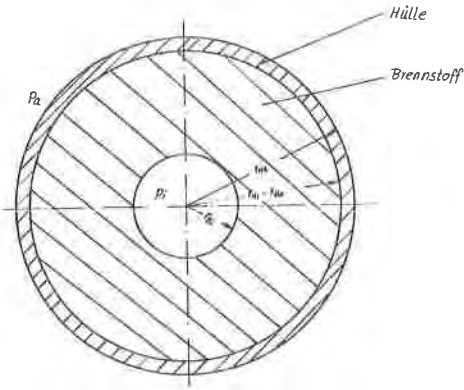


Abb 1 Brennstoffhohlzylinder in Kontakt mit der Brennstabhülle

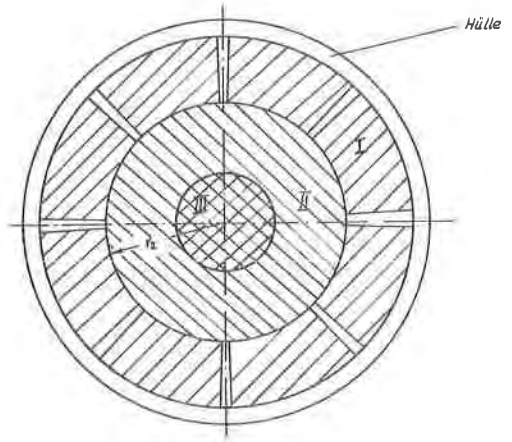


Abb 2 gerissener Brennstoff in Kontakt mit der Brennstabhülle

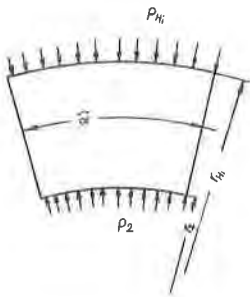


Abb 3 Das starre Ripstück

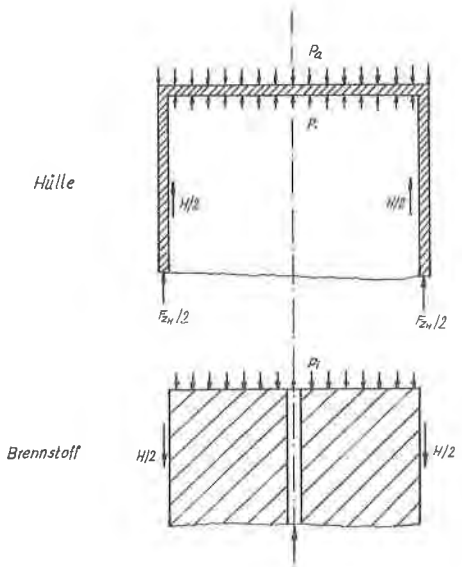


Abb 4 Kräfteschema bei haftendem Brennstoff

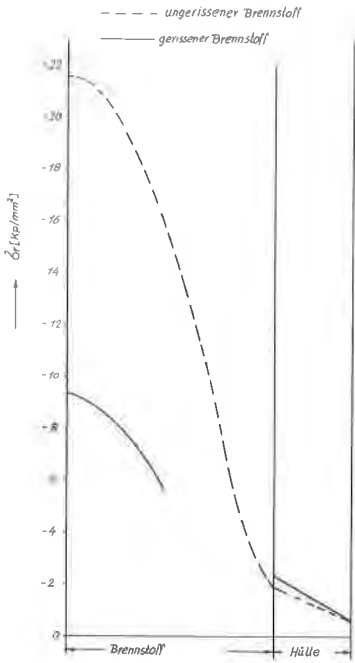


Abb 5 Radialspannungsverlauf bei gerissenem und ungerissenen Brennstoff

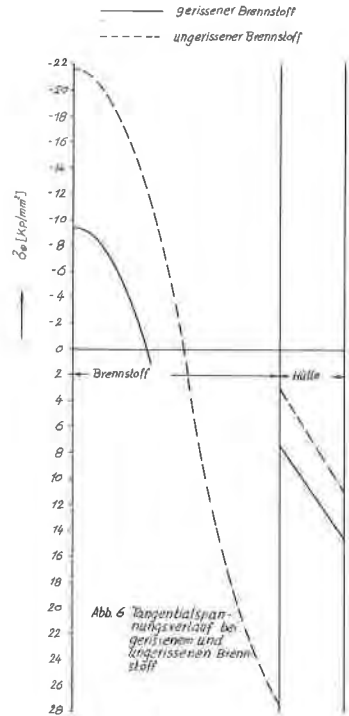


Abb 6 Tangentialspannungsverlauf bei gerissenem und ungerissenem Brennstoff

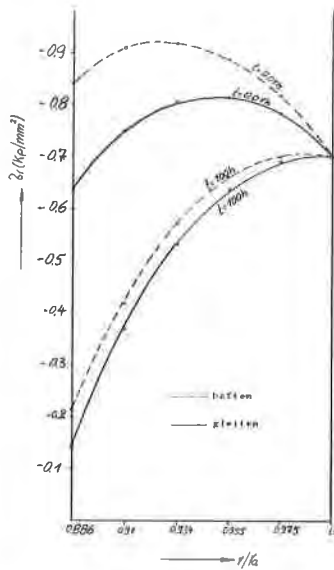


Abb 7 Ortslicher Verlauf für Radialspannungen bei haftendem und gleitendem Brennstoff

