

**RECHNERISCHE BESTIMMUNG DER
WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG DER
VERFÜGBAREN LEISTUNG EINES
SYSTEMS VON KRAFTWERKSBLÖCKEN**

**(THEORETICAL DETERMINATION OF THE
PROBABILITY DISTRIBUTION OF AVAILABLE POWER OF A
SYSTEM OF POWER STATION UNITS)**

K. TRAUTMANN

*Fachgebiet Statistik und Ökonometrie,
Technische Hochschule Darmstadt, D-61 Darmstadt, Germany*

SUMMARY

In order to come to a decision on capacity reserve of a system of power station units we must know the reaction at operation and failure of the single unit. Its reaction is dependent on determined factors as scheduled outages and random variables as forced failures and operating periods. Only those last variables will be taken into consideration. In literature it is explicitly or implicitly assumed that the sequence of operating and failure periods are independent and that they occur exponentially distributed. On the basis of this assumption the probability distribution of available power of a system of power station units (DAP) is generally determined. The examination of the operating and failure periods of ten units, however, has shown that this assumption can only be upheld for the operation times while the failure time can be more exactly described by a combination of exponential and logarithmic normal distribution. Thus the methodical basis of procedures proposed in the past is taken away.

In order to analyse the different effects of the alternative use of both distribution types of the failure time upon the DAP a simulation model was developed. Its deviation was so marginal that it henceforward justifies to use the exponential distribution. The advantage consists in its being handled more easily. Now we must ask whether the DAP will be determined better analytically or by simulation as far as accuracy, computer time and memory are concerned. Formerly proposed approximation procedures turned out to be too inexact.

By analytical determination of the DAP we understand: Given n units with the power x_i and the probability of failure q_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Principally there are 2^n available power values of the system of n units $0, x_1, \dots, x_n, x_1 + x_2$ etc. with the corresponding probabilities $q_1 q_2 \dots q_n$ $(1 - q_1) q_2 \dots q_n$ etc. The expenditure of calculation is considerable. An algorithm, however, has been found, computing recursively the DAP and limiting the number of necessary operations to a tolerable extent. It needs for $n = 100$ only 350 sec on an older machine (IBM 7040).

The simulation procedure requires much more time. The cut-off criterion was defined in the following way: the absolute deviation should not be greater than 0.005 over a simulation period of ten years. Thus the simulated process ran over 29 years at for instance $n = 9$ and needed twelve minutes of computer time. Even after 100 years the deviation from the DAP that had been analytically determined still amounted to 0.016 in the highest class. On the other hand a simulation model permits to map the whole operation of a power system. Thus one can study the effect of system interruption and similar problems by parametrically varying the load.

1. Einleitung: Einordnung des Themas

Verfügbarkeitsuntersuchungen von Reaktorbauelementen dienen zunächst der Ermittlung von Schadensschwerpunkten, damit die Zuverlässigkeit und die Betriebssicherheit der schwachen Elemente durch technische Maßnahmen verbessert werden kann. Darüber hinaus bilden die gewonnenen Informationen die Grundlage für die Formulierung vorbeugender Instandhaltungsstrategien, die sowohl die Zuverlässigkeit erhöhen, als auch durch entsprechende Organisation des Wartungspersonals dessen Kosten vermindern. Die Ausfalldaten der Bauelemente stellen auch den Ausgangspunkt für die Berechnung der Verfügbarkeit von Blöcken und von Systemen von Blöcken dar. Zwar befaßt sich die Konferenz, wie diese Division, vorwiegend mit den Bauelementen, aber gerade bei der Zuverlässigkeitsanalyse muß man den Blick auch auf den Block oder ein System von Blöcken in einem EVU-Netz werfen. Denn die zu behandelnden Probleme sind auf den verschiedenen Ebenen - zumindest aus der Sicht des Statistikers - ähnlich. Auch die mehr ökonomischen Ziele der Verfügbarkeitsuntersuchungen - Sicherung der Energieversorgung und Erhöhung der Rentabilität durch Hebung der Zuverlässigkeit, durch optimale Reservehaltung und durch wirtschaftliche Lastverteilung - beeinflussen die Arbeiten.

Besonders das Problem der Reservehaltung gewinnt an Gewicht, wenn man nur die Größe von Atomkraftwerken bedenkt: der Ausfall einer 1200MW-Einheit ist schwerwiegender als der Ausfall eines 150MW-Steinkohlen-Blockes. Zur Lösung dieser Aufgabe muß man neben anderem die Verteilung der verfügbaren Leistung eines Systems von Kraftwerksblöcken (VVL) kennen. Die Verfahren zu ihrer Bestimmung ist das Thema dieses Referats. Vorab jedoch müssen wir uns mit dem Betriebs- und Ausfallverhalten des Blockes befassen, weil seine Kenntnis Grundlage zur Lösung der gestellten Aufgabe ist und weil die These von der engen Verbindung der Zuverlässigkeitsanalyse auf den verschiedenen Ebenen erhärtet werden soll.

Die hier vorgetragenen Ergebnisse sind (aus praktischen Gründen) an Hand der Ausfalldaten von zehn Blöcken mit fossilen Brennstoffen überprüft worden. Wir sind der Meinung, daß hinsichtlich der statistisch-methodischen Probleme, die im Vordergrund stehen, kein qualitativer Unterschied zu Atomkraftwerken besteht.

2. Die Verteilung der Betriebs- und Ausfallzeiten

2.1. Zufallsgrößen bei der Verfügbarkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befaßt sich mit Zufallsvorgängen. Es ist zu fragen, welche Größen in der Verfügbarkeitsrechnung zufallsabhängig sind. Der Betrieb eines Blocks ist gekennzeichnet durch eine Folge von Betriebszeiten, wie Lastmangel und wegen planmäßiger Reparatur- und Wartungsmaßnahmen. Ausfälle wegen Brennstoffmangel und ähnlichem können als unbedeutend vernachlässigt werden. Planmäßige Stillstände sind in ihrem Beginn disponibel, in ihrer Länge jedoch nicht genau vorherbestimmbar. Dennoch kann man sie als determiniert ansehen. Das gleiche gilt für die Stillstände wegen außenliegender Ursachen. Wird ein Block während der Störung eines oder mehre-

rer Bauelemente abgeschaltet, so werden häufig solche Bauelemente miterneuert, die noch nicht defekt sind, mit deren Störung aber bald gerechnet wird. Das beeinflusst zwar das Verteilungsgesetz der Betriebs- wie der Reparaturzeiten, es bedeutet jedoch keine systematische Verzerrung, wenn es regelmäßig geschieht. Auch Verfälschungen, die dadurch entstehen könnten, daß eine Reparatur nicht unter Zeitdruck durchgeführt wird, werden durch Korrekturen beseitigt. Die störungsbedingten Ausfallzeiten kann man also als zufällig ansehen.

Die Betriebszeit ergibt sich als die Zeit zwischen zwei störungsbedingten Ausfällen abzüglich der Zeiten, in denen der Block planmäßig oder wegen außenliegender Ursachen stillsteht. Grundsätzlich kann sie ebenfalls als zufällig angesehen werden. Doch sind die systematischen Verzerrungen nicht übersehbar. Denn es treten solche Störungen auf, bei denen der Block noch bis zur nächsten lastschwachen Zeit unter Vollast oder Teillast weitergefahren werden kann. Sodann beeinflusst eine planmäßige Instandhaltung den entsprechenden Betriebszeitwert. Ferner ist der Einfluß unterschiedlicher Betriebsarten, wie häufiges An- und Abfahren oder Mitlaufen, ohne Energie abzugeben, bislang nicht genauer geklärt. Solange diese Probleme nicht gelöst sind, wird man die Betriebszeit als *e i n e* Zufallsvariable ansehen müssen, um überhaupt Wahrscheinlichkeitsaussagen über die Verfügbarkeit treffen zu können.

Weitere Schwierigkeiten treten bei der numerischen Bestimmung der Betriebs- und Ausfallzeitwerte auf. In den Kraftwerken werden zunächst nur die Bauelementausfälle entsprechend der VDEW-Richtlinien zur Erfassung von Schäden und Stillstandszeiten ermittelt, aus denen dann die Blocknichtverfügbarkeiten errechnet werden. Der Schlüssel der Stillstandsursachen ist nicht unter dem Gesichtspunkt verfaßt worden, die Realisationen von Zufallsvorgängen und die durch die Entscheidung der Betriebsleitung oder der Lastzentrale determinierten Größen zu ermitteln. Das führt dazu, daß z. B. während eines Stillstandes wegen Lasteinschränkung ein Bauelement als gestört ausgefallen gemeldet wird, oder daß während eines planmäßigen Stillstandes auch eine Lasteinschränkung angegeben wird. Man muß dann mit plausiblen Entscheidungsregeln die gesuchten Größen bestimmen. Es wäre zu überlegen, ob die VDEW-Richtlinien unter diesem Aspekt erweitert werden können, damit man die *Z u f a l l s g r ö ß e* gesondert erfaßt.

2.2. Der Typ der Verteilung der Betriebs- und Ausfallzeiten

Nachdem wir die Betriebszeiten und die störungsbedingten Ausfallzeiten als zufallsabhängig ansehen können, muß man fragen, welchem Verteilungstyp folgen sie und ob die vorhandenen Stichprobenwerte, die Folge der an einem Block beobachteten Betriebs- und Ausfallzeiten, aus *e i n e r* Grundgesamtheit stammen.

Ein Block fällt wegen Fehler an den Bauelementen aus. Die Gründe dafür sind von mannigfaltiger Art, wie sie ja auch im VDEW-Schlüssel der Stillstandsursachen aufgezeigt sind. Die einzelnen Fehlerarten oder ihr kombinier-

tes Auftreten beeinflusst die Gestalt der verschiedenen Ausfallverteilungen (so heißen die Verteilungen für die Betriebszeiten und Lebensdauern). Sie sind fast alle asymmetrisch und unimodal, wie z. B. die Gamma-, Weibull- oder Log-Normal-Verteilung. Es ist somit schwierig, den richtigen Typ zu wählen. Dabei hilft ein alternatives Konzept zur Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Funktion der Ausfallrate

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(t < T < t + \Delta t | t < T)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{P(t < T)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (1)$$

Sie stellt, grob gesprochen, die Wahrscheinlichkeit für einen plötzlichen Ausfall in dem infinitesimalen Zeitabschnitt $t+dt$ unter der Bedingung dar, daß die Einheit bis zum Zeitpunkt t gelebt hat.

Der mögliche Verlauf von $r(t)$ - fallend, konstant oder steigend - erlaubt eine andere Klassifizierung der Fehlerursachen und gleichzeitig eine Zuordnung der verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Abnehmende Ausfallrate wird im allgemeinen nur in der ersten Lebensphase einer beliebigen Einheit auftreten, wenn sich die Frühausfälle durch Konstruktionsfehler und technologische Mängel ereignen. Es folgt ein Lebensabschnitt des "normalen" Betriebes, in dem die Einheit rein zufällig durch sonstige unvorhergesehene Fehler oder unsachgemäße Bedienung ausfällt. Die Wahrscheinlichkeit eines Defektes ist im infinitesimalen Abschnitt t_1+dt genau so groß wie im Intervall t_2+dt ($t_1 < t_2$), $r(t)$ ist also konstant. Erst in einer dritten Phase werden sich Alterungserscheinungen aller Art bemerkbar machen, die Ausfallrate steigt. Die Ausfallrate der Exponentialverteilung ist z. B. konstant, während die der Lognormalverteilung für kleine t steigt und große t fällt. Diese allgemeinen Überlegungen über die Lebensdauer einer beliebigen Einheit müssen wir nun auf die beiden Merkmale Reparatur- und Betriebszeit übertragen. Beginnen wir mit der letzteren.

Bei einem Blockausfall wird das (oder die) defekte Bauelement entweder repariert oder erneuert. Das physische Leben des Blockes geht auf jeden Fall über mindestens fünfzehn Jahre weiter. Im statistischen Sinne könnte man sagen, er beginnt jedesmal ein neues Leben, dessen Dauer wir Betriebszeit nennen. Diskutieren wir zunächst die Frage, ob die Folge der beobachteten Betriebszeiten zur Schätzung ihrer Verteilung verwendet werden kann. Dazu betrachten wir als typisches Beispiel ein Modell mit 100 gleichartigen elektronischen Bauteilen, die zum gleichen Zeitpunkt in Betrieb gehen. Sie fallen in zufälliger Reihenfolge aus. Die sich realisierenden Betriebszeiten stammen alle aus derselben Verteilung. Unter Umständen ergibt sich, daß die kleineren Lebensdauern eine fallende Ausfallrate besitzen, daß also Frühausfälle vorliegen. Die gleiche Situation wäre im Betrieb eines Kraftwerksblockes gegeben, wenn durch Reparatur der Block wieder in den gleichen Zustand versetzt würde, in dem er sich vor dem Ausfall befand. Es könnten auch Frühausfälle auftreten, die in diesem Zusammenhang jedoch nicht Ausfälle darstellen, die früh in der Kalenderzeit nach Inbetriebnahme lägen, sondern sich früh nach irgendeiner Wiederinbetriebnahme ereigneten.

Diese Situation liegt aber gerade nicht vor. Ein neuer Block stellt in aller Regel eine Neukonstruktion dar, so daß sowohl Konstruktionsfehler als auch technologische Mängel auftreten. Sie werden bei Ausfällen beseitigt. Das hat zur Folge, daß die verschiedenen Betriebszeiten nicht mehr aus derselben Verteilung stammen und die tatsächlich auftretenden Frühausfälle keine Frühausfälle im oben definierten Sinne bedeuten. Wollte man sie, charakterisiert durch eine fallende Ausfallrate, näher beschreiben, müßte man die Zeit bis zum ersten Ausfall t_1 von z. B. 100 gleichartigen Kraftwerksblöcken, dann die Zeit t_2 getrennt von t_1 usw. auswerten. Somit könnte man die Verteilung bis zum ersten, zum zweiten usw. Ausfall bestimmen. Da Kraftwerksblöcke selten gleichartig bezüglich Konstruktion und Betriebsbedingung sind, muß man diese methodischen Bedenken ignorieren und die Beobachtungswerte eines Blockes zur Analyse der Frühausfälle und zur Schätzung seiner Verteilungsparameter verwenden, um wenigstens zu angenäherten Ergebnissen zu kommen.

Dabei treten aber besondere Probleme wegen der geringen Zahl der Beobachtungswerte auf: Bei den untersuchten Blöcken waren es im Mittel zwanzig pro Jahr. Aus diesem Grund war es auch nicht möglich, statistisch signifikante Aussagen über die Phase der Frühausfälle zu treffen. Es empfiehlt sich daher, sie nur in der Größe der mittleren Betriebszeit zu berücksichtigen. Nach der Überwindung der "Kinderkrankheiten" wird der Block im allgemeinen nur noch zufällig ausfallen, so daß man Exponentialverteilung annehmen kann. Sie kann bei konstruktiven Verbesserungen, die auch später vorgenommen werden, gestört werden. Eine Phase der Alterungsausfälle scheint, im Gegensatz zu den Bauelementen, ausgeschlossen.

Für die Ausfallzeiten wird in der Literatur über die Verfügbarkeit von Kraftwerksanlagen ebenfalls etwas vorschnell Exponentialverteilung angenommen. Die Annahme wäre gerechtfertigt, wenn die Reperaturmannschaft sofort nach dem Ausfall beginnen könnte, die Fehler zu beseitigen, und wenn ihre Arbeiten nicht verzögert werden. Tatsächlich ist die Situation durch zwei Arten von Fehlern gekennzeichnet. Zur ersten Gruppe gehören Störungen wie Falschauslösungen von Fehlerrelais, die durch das Bedienungspersonal schnell behoben werden können. Für sie läßt sich Exponentialverteilung unterstellen. Bei der größeren Zahl von Ausfällen jedoch muß der Block erst erkalten und später wieder angefahren werden. Die Verteilung der eigentlich, zufällig schwankenden Reparaturzeit ist um einen bestimmten Betrag - bei den untersuchten Blöcken etwa 14 Stunden - verschoben. Wenn die Reparatur nicht nach einer gewissen Zeit beendet ist, besteht aus psychologischen und logistischen Gründen wenig Hoffnung, daß sie bald abgeschlossen wird, d. h. die "Ausfall"-Rate der Ausfallzeiten steigt zunächst an und fällt später. Diese Situation beschreibt die logarithmische Normalverteilung, die noch zusätzlich um τ verschoben ist, so daß man für die Ausfallzeit eine Kombination der genannten Verteilungstypen annehmen muß.

2.3. Schätz- und Testprobleme

Verteilungshypothesen müssen überprüft werden. Von den bekannten Verfahren zeigte sich der Kolmogorov-Smirnov-Test als der geeignetste. Er nimmt die größte Abweichung der theoretischen und der empirischen Verteilungsfunktion als Prüfmaß. Die Hypothese wird angenommen, wenn

$$\max_i \left(\left| F(t_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right|; \left| F(t_{(i)}) - \frac{i}{n} \right| \right) \leq A_{1-\alpha; n}, \quad (2)$$

wobei $t_{(i)}$ der i -te von n der Größe nach geordneten Beobachtungswerte ist. Die Verteilung von A ist tabelliert. Als gute Näherungsformel mit Abweichungen unter 1 % von den Tabellenwerten erwies sich

$$A_{1-\alpha; n} = \sqrt{-0,5 \ln(\alpha/2)} / \sqrt{n+1} \text{ für } n > 6 \quad (3)$$

Bei den untersuchten Blöcken wurden die oben aufgestellten Verteilungsannahmen - Exponentialverteilung für die Betriebszeiten und eine Kombination aus Exponential- und verschobener Log-Normal-Verteilung - überwiegend angenommen.

Die Schätzung der Verteilungsparameter muß bei kleinen Stichprobenumfängen erfolgen. Der Maximumlikelihood-Schätzwert des Parameters der Exponentialverteilung mit der Dichte $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ lautet $\hat{\lambda} = n / \sum t_i = \bar{t}$, wobei die t_i die Beobachtungswerte bedeuten. Man kann zeigen, daß der Ausdruck $2n\lambda\bar{t} \chi^2$ verteilt mit $2n$ Freiheitsgraden ist. Das läßt sich zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls verwenden:

$$\frac{\chi_{\alpha/2; 2n}^2}{2n\bar{t}} \leq \lambda \leq \frac{\chi_{1-\alpha/2; 2n}^2}{2n\bar{t}} \quad (4)$$

Die Konfidenzaussage ist praktisch wenig befriedigend. Es ergab sich z. B. bei einem der untersuchten Blöcke bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % selbst nach 85 Beobachtungen immer noch ein Intervall von $0.0022 \leq \lambda_p \leq 0.0034$. Wie breit das Intervall ist, wird noch deutlicher, wenn man den Vertrauensbereich für den Erwartungswert $E(T) = 1/\lambda$, angibt: $295 \leq E(T) \leq 451$.

Da die Schätzung zu keinem eindeutigen Ergebnis führt, könnte man die Erfahrung über ähnliche Anlagen einbeziehen, indem man die Hypothese testet, ein Block habe eine bestimmte mittlere Betriebszeit. Der Test läßt sich entsprechend der Überlegung, die zu dem Konfidenzintervall führt, konstruieren. Die Testaussage ist jedoch genauso unscharf. Auch die Anwendung eines Tests auf Gleichheit zweier Mittelwerte sowie der Wald'sche Quotiententest liefern keine besseren Ergebnisse. Daraus ergeben sich die folgenden Konsequenzen:

- Die statistische Methodenlehre kann keine Verfahren bereitstellen, um bei neuen Blöcken schnell für die Verteilungsparameter genügend genaue Schätzwerte zu erhalten.
- Man wird sie daher zunächst auf Grund von Erfahrungen mit ähnlichen Anlagen, versehen mit einem Sicherheitszuschlag, subjektiv schätzen und den Schätzwert in periodischen Abständen verbessern, indem man die inzwischen beobachteten Betriebszeiten berücksichtigt.

Für die Schätzung der Verteilung der Ausfallzeiten besteht das Problem der kleinen Stichproben ebenfalls. Darüber hinaus treten Schwierigkeiten bei der Ermittlung der Schätzwerte auf. Die Dichte der kombinierten Verteilung hat die Form

$$f(t) = \left\langle k_E \lambda \exp(-\lambda t) \right\rangle_{t>0} + \left\langle \frac{k_L}{\sigma \sqrt{\pi}} \frac{1}{(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(\ln(t-\tau)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right\rangle_{t>\tau}, \quad k_E + k_L = 1 \quad (5)$$

Dabei sollen die spitzen Klammern auf die unterschiedlichen Definitionsbereiche von t hinweisen. Fig. 1 zeigt beispielhaft diese Dichtefunktion für die Reparaturzeiten eines Blockes und das Histogramm der Beobachtungswerte. Die Parameter $\lambda, \mu, \sigma, \tau$ und die Diskriminationskonstante k_E bzw. k_L sind zu schätzen. Die Maximum-Likelihood-Methode führt nicht zu expliziten Schätzfunktionen. Es wurde ein Iterationsverfahren angewendet, das allerdings so kompliziert und rechenaufwendig ist, daß es hier nicht präsentiert werden soll. Stattdessen wird vorgeschlagen, eine vereinfachte Schätzung vorzunehmen:

- Der Verschiebungsparameter τ wird subjektiv aus dem Histogramm oder den geordneten Beobachtungswerten bestimmt.
- Der Parameter λ wird aus den n_E Beobachtungswerten, die kleiner oder gleich τ sind, durch den Maximum-Likelihood-Schätzwert

$$\hat{\lambda} = n_E / \sum t_i \quad (6)$$

berechnet.

- Die Parameter der verschobenen Log-Normal-Verteilung werden entsprechend aus der Teilmenge ($t_i > \tau$) aus

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n_L} \sum \ln(t_i - \tau) \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_L} \sum (\ln(t_i - \tau) - \hat{\mu})^2 \quad (8)$$

bestimmt.

- Die Diskriminationskonstante schätzt man durch

$$\hat{k}_E = \frac{n_E}{n} \quad (9)$$

Mit Hilfe der Verteilungen der Betriebs- und Ausfallzeiten lassen sich eine Reihe nützlicher Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen. Von eigentlichem Interesse ist die Verteilung der verfügbaren Leistung eines Systems von Kraftwerksblöcken, die sich auf Grund der diskutierten Verteilungstypen ergibt.

3. Die Verteilung der verfügbaren Leistung eines Systems von Kraftwerksblöcken

3.1. Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

In der Literatur geht man von der Annahme aus, daß der Betrieb eines Blockes i als ein Ereignis mit der Grundwahrscheinlichkeit p_i und der Ausfall als unabhängiges Gegenereignis mit der Wahrscheinlichkeit $q_i = 1 - p_i$ aufzufassen ist, um die Wahrscheinlichkeit des Ausfalles (oder der Verfüg-

barkeit) von r von insgesamt n Blöcken zu bestimmen. (Eine ausführliche Bibliografie findet sich bei Trautmann [1].) Dabei wird p durch die Erwartungswerte der Betriebszeit μ_B und der Ausfallzeit μ_A ,

$$p = \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \quad (10)$$

definiert, die durch die Stichprobenmittel geschätzt werden.

Ist ein System von n Blöcken mit den Leistungen x_1, x_2, \dots, x_n und den Ausfallwahrscheinlichkeiten q_1, q_2, \dots, q_n gegeben, dann gibt es $m=2^n$ Zustände und also auch m Leistungswerte $x'_0=0, x'_1=x_1, \dots, x'_{n+1}=x_1+x_2, \dots, x'_{m-1}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß z. B. für $n=3$ die Leistungen x_1 und x_3 verfügbar sind, errechnet sich zu

$$P(X=x_1+x_3) = P(X=x_1 \mid X=0 \mid X=x_3) = p_1 q_2 p_3 = p'_6 \quad (11)$$

Entsprechend müssen alle $p'_k (k=0, 1, \dots, m-1)$ berechnet werden. Es gibt also keinen funktionalen Ausdruck für die Verteilung der verfügbaren Leistungswerte außer für den Fall gleicher p_i - und x_i -Werte. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Leistung von r Blöcken verfügbar ist

$$P(X=rx) = f(r|n, p) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad (12)$$

Je nach Größe der x_i -Werte können viele x'_k -Werte gleich sein. Dann gilt

$$P(X=x'_k=x'_j) = P(X=x'_j) = p'_k + p'_j \quad (13)$$

Die Gleichung für den Erwartungswert der Verteilung der verfügbaren Leistungen

$$\mu = \sum_k p'_k x'_k \quad (14)$$

läßt sich umformen nach

$$\mu = \sum_{i=1} p_i x_i$$

Entsprechend ergibt sich für die Varianz

$$\sigma^2 = \sum_k (x'_k - \mu)^2 p'_k = \sum_i p_i q_i x_i^2 \quad (15)$$

Beide Parameter sind also leicht zu berechnen.

Die Voraussetzung für die Berechnung der VVL in der beschriebenen Weise ist die Unabhängigkeit der Folge der Beobachtungswerte. Die Implikationen dieser Annahme werden deutlich, wenn man die Folge der Betriebs- und Ausfallzeiten als einen zeithomogenen Markovprozess darstellt. Er wird durch die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j während der Zeit t

$$p_{ij}(t) = P(X_{s+t}=j | X_s=i) \text{ für } i, j = 0, 1, 2, \dots \text{ und } t \geq 0 \quad (16)$$

beschrieben. Das bedeutet, der Zustand j hängt nicht von den Zuständen vor dem Zeitpunkt s ab. Zusätzlich wird angenommen, daß die Zeit s beliebig ist.

Es läßt sich zeigen:

- Die Zeit t , in der sich der Prozess in einem beliebigen Zustand befindet,

ist exponentialverteilt.

- In einem Prozess mit zwei Zuständen, Betrieb 1 und Ausfall 0, lauten die Übergangswahrscheinlichkeiten im stationären Zustand

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{01}(t) = P_1 = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{10}(t) = P_0 = \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} \quad (17)$$

So aber wurden die Wahrscheinlichkeit für Ausfall und Betrieb definiert.

- Die oben hergeleitete VVL ergibt sich ebenfalls aus dieser prozessualen Betrachtung.

Daraus folgt: die Berechnung der VVL in der angegebenen Weise ist vom methodischen Standpunkt her so nicht gerechtfertigt, denn die Ausfallzeiten sind nicht exponentialverteilt.

3.2. Ein Simulationsmodell zur Berechnung der VVL

Es ist jedoch zu überprüfen, welche praktische Bedeutung dieses theoretisch interessante Ergebnis besitzt. Der korrekte Weg hierzu heißt die Aufstellung eines entsprechenden Prozessmodelles und die Ermittlung der stationären Übergangswahrscheinlichkeiten. Da wir keine analytische Lösung der Aufgabe sahen, wurde ein Simulationsmodell aufgestellt, um das reale System in seiner Struktur und in seinem Verhalten abzubilden. Besonders auf stochastische Prozesse lassen sich Simulationsverfahren anwenden. Gleichzeitig sollte die Leistungsfähigkeit dieses in der Literatur ebenfalls vorgeschlagenen Verfahrens hinsichtlich Rechenaufwand und Genauigkeit untersucht werden.

Die VVL wird aus der Kurve der verfügbaren Leistung der n Blöcke, die sich durch Überlagerung der Folge von Betriebs- und Ausfallzeiten der einzelnen Blöcke ergibt, geschätzt (Fig. 2):

$$\hat{P}(X=x'_k) = \hat{p}'_k = \frac{S}{\sum_{j=1}^S t_{kj}} \quad (18)$$

Denn die Leistung x'_k ist t_{kj} Zeiteinheiten lang verfügbar. Alle s t_{kj} -Zeiten kann man in diesem Sinn als absolute Häufigkeit für das Auftreten der Leistung x'_k betrachten. Definitionsgemäß ist die Summe aller \hat{p}'_k -Werte eins.

Um nun die Kurve der verfügbaren Leistung im Simulationsmodell zu ermitteln, benötigt man Zufallszahlen, die den oben beschriebenen Verteilungsgesetzen gehorchen. Zur Erzeugung von im Intervall (0,1) gleichverteilter Zufallszahlen z wurde einer im Programmsystem vorhandener Zufallszahlengenerator verwendet, der nach dem linearen Kongruenzprinzip arbeitet. Die Umrechnung in Zufallszahlen, die einer anderen Verteilung folgen, erreicht man - bildlich gesprochen - durch Spiegelung der gleichverteilten Variablen an der entsprechenden Verteilungsfunktion. Man spricht auch von der Inversionsmethode. Die Zufallszahlen t , die durch die Transformation

$$t = F^{-1}(z) \quad (19)$$

bestimmt werden, sind nach $F(t)$ verteilt. F^{-1} bezeichnet die inverse Funktion von F .

Im Fall der Exponentialverteilung ist $F(t)=1-\exp(-\lambda t)$ und nach Gl. (19)

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln(1-z) \text{ mit } z = F(t) \quad (20)$$

Darin kann $(1-z)$ durch z ersetzt werden, da mit z auch $(1-z)$ gleichverteilt ist. Für die aus Exponential- und verschobener logarithmischer Normalverteilung kombinierte Verteilung nach Gl. (5) führt das mit Gl. (19) angegebene Verfahren nur für den Bereich $t \leq \tau$ zu einem analytisch lösbaren Ausdruck:

$$t = (\ln k_E - \ln(k_E - z)) / \lambda \text{ mit } z = F(t) \text{ und } z < F(\tau) \quad (21)$$

Für $z > F(\tau)$ lassen sich die dazugehörigen t -Werte wegen der komplizierten Form des zweiten Terms von Gl. (5) nur noch iterativ bestimmen. Dazu ist die Nullstelle der Funktion $G(t) = F(t) - z = 0$ für $\tau < t < \infty$ zu suchen. $G(t)$ hat exakt eine Nullstelle, da $F(t)$ monoton wächst. Das einfache Newtonsche Iterationsverfahren konvergiert nicht notwendig, weil $F(t)$ konvexe und konkave Kurvenstücke enthält (Fig. 3). Daher wurde das rasch und sicher konvergierende Verfahren der quadratischen Interpolation mit Intervallschachtelung gewählt.

Das Simulationsmodell besitzt im einzelnen folgende Gestalt, die teilweise durch das Bemühen bestimmt war, das (Fortran-)Programm einfach zu fassen:

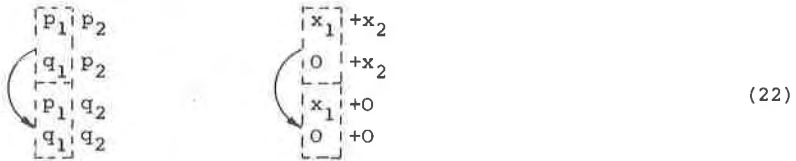
- Es wird eine Periodendauer t_p (hier 8760) und die kleinste Zeiteinheit (hier 1h) festgelegt.
- In einer Einschwingphase wird für jeden Block bestimmt, ob er im Zeitpunkt $t=0$ in Betrieb oder ausgefallen ist.
- Für jeden Block wird nun die Folge der Betriebs- und Ausfallzeiten in ganzen Zeiteinheiten erzeugt bis ihre Summe t_p erreicht oder überschreitet. Ergibt sich ein Überhang, der entweder Betriebs- oder Ausfallzeit sein kann, wird er in die nächste Periode übernommen.
- Durch Überlagerung aller n Blöcke wird dann die Kurve der verfügbaren Leistungen für eine Periode errechnet.
- Jetzt können die Häufigkeiten nach Gl. (18) pro Leistungsklasse bestimmt werden. Sie werden auf die in vorherigen Perioden simulierten Häufigkeiten addiert.

Die so errechnete Verteilung konvergiert mit wachsendem t gegen die wahre Verteilung. Diese ist unbekannt und kann damit nicht als Maß für die Konvergenz verwendet werden. Als Indiz dafür kann die annähernde Gleichheit der Simulationsergebnisse über eine "genügend" große Anzahl von Perioden dienen. Bei der vorliegenden Untersuchung wurde die Simulation abgebrochen, wenn die VVL in allen Klassen zehn Perioden lang nicht mehr als absolut 0,005 von den Ergebnissen der Vorperiode abwich. Die Resultate der verschiedenen Rechnungen werden im einzelnen später präsentiert. An dieser Stelle sei nur vorweggenommen, daß die unterschiedlichen Verteilungsannahmen für die Ausfallzeiten kaum unterschiedliche VVL ergaben.

3.3. Eine analytische Methode zur Berechnung der VVL

Wenn man also hinsichtlich der Berechnung der VVL ohne großen Verlust bei der Genauigkeit unterstellen kann, auch die Ausfallzeiten seien ex-

ponentialverteilt, dann kann man die VVL entsprechend der in Abschnitt 3.1. beschriebenen wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen bestimmen. Alle 2^n verschiedenen Leistungssummen von n Blockleistungen bzw. alle 2^n verschiedenen Produkte der Betriebs- und Ausfallwahrscheinlichkeiten lassen sich rekursiv nach folgendem Schema finden:



Im 3. Schritt werden die Wahrscheinlichkeitsprodukte des 2. Schrittes erst mit p_3 und dann mit q_3 multipliziert. Entsprechend wird zu den Leistungssummen des 2. Schrittes erst x_3 und dann 0 addiert usw.

Würde man diesen Algorithmus unmittelbar programmieren, so wäre der Rechenaufwand und erst recht der Speicherplatzbedarf beträchtlich. Die Rechnung läßt sich jedoch stark vereinfachen, wenn man bedenkt, daß es nie 2^n dem Werte nach unterschiedliche Leistungswerte geben kann. Ein Beispiel mag das erläutern: Ein System von 10 Blöcken habe eine installierte Leistung von 3000 MW. Die Endziffern der Blockleistungen betragen im allgemeinen 0 oder 5. Somit sind höchstens 601 verschiedene Werte möglich. Diese Zahl verringert sich noch weiter, wie man leicht sieht. Von den $2^{10}=1024$ Leistungssummen müssen viele gleich sein. Man kann nun zeigen, daß man gleiche Leistungswerte auf jeder Rekursionsstufe zusammenfassen darf. Verfährt man so, beträgt die Rechenzeit gegenüber dem vorherbeschriebenen Vorgehen nur ein Achtzigstel. Die Rechenzeiterparnis ist jedoch nicht bedeutsam im Vergleich zur Speicherplatzersparnis. Denn vorher brauchte man $3 \cdot 2^n$ -Werte, womit man bei größeren Systemen schnell an die Kapazitätsgrenze kommen kann.

3.4. Die Ergebnisse bei der Berechnung der VVL

Tab. 1 zeigt Blockleistung, Anzahl der Beobachtungen und alle Verteilungsparameter von neun Blöcken. Diese Daten benötigt man bei der Berechnung der VVL nach den verschiedenen Verfahren, deren Ergebnisse in Tab. 2 verzeichnet sind.¹ Im einzelnen läßt sich festhalten:

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der VVL, die durch Simulation mit exponentialverteilten Ausfallzeiten bestimmt wurde, unterscheidet sich kaum von der simulierten Wahrscheinlichkeitsfunktion der VVL, bei der für die Ausfallzeiten die kombinierte Verteilung unterstellt wurde. Beide Funktionen sind bis auf Klasse 8 (1200 MW), die um 0.00666 abweicht, bis auf die zweite Stelle genau, d. h. die Abweichungen liegen innerhalb der Genauigkeitsschranke, wie sie für die jeweilige Rechnung gefordert wurde. Dieses Ergebnis überrascht nicht, wenn man bedenkt, daß die mittleren Ausfallzeiten in der Größenordnung

1) Die Berechnungen sind im Rahmen einer Studienarbeit von G. Engels an der TH Darmstadt vorgenommen worden.

von 10 % der mittleren Betriebszeiten liegen. Sie fallen deshalb nicht sehr stark ins Gewicht. Weiterhin muß man berücksichtigen, daß die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung und der kombinierten Verteilung einen reellen Schnittpunkt besitzen (Fig. 3). Oberhalb des Schnittpunktes liefert die Exponentialverteilung längere Ausfallzeiten als die kombinierte Verteilung. Unterhalb des Schnittpunktes ist es umgekehrt. Von der Lage des Schnittpunktes, der etwa bei $F(t)=0.6$ zu vermuten ist, ist es nun abhängig, ob sich die Mittelwerte der durch den Zufallsprozess bestimmten Ausfallzeiten für den stationären Zustand einander nähern.

Die Übereinstimmung von simulierter und analytisch berechneter VVL ist nicht so gut, die Abweichung in der letzten Klasse beträgt 0.024. Die Ursache ist im Simulationsmodell zu suchen. Eine Fehlerquelle könnte darin liegen, daß die durch den Zufallsprozess bestimmten Größen aus programmieretechnischen Gründen einfach gerundet werden. Wegen der konkaven Gestalt der Verteilungsfunktion werden mehr Zufallszahlen abgerundet als aufgerundet (Fig. 3). Rundet man nach der Vorschrift

$$t = \begin{cases} t_1 & \text{für } F(t_2) - F(t_1) \leq (F(t_2) - F(t_1))/2 \\ t_2 & \text{für } F(t_2) - F(t_1) > (F(t_2) - F(t_1))/2 \end{cases} \quad (23)$$

so ist jedoch die Auswirkung auf die VVL unbedeutend. Da an der Qualität des Zufallszahlengenerators nicht zu zweifeln ist, bleibt nur noch übrig, daß die Simulation nur langsam konvergiert und das gewählte Abbruchkriterium zu unscharf ist. Daraufhin wurde ein Simulationslauf über 100 Perioden, also 100 Jahre, vorgenommen. Die dann errechnete Verteilung hatte sich weiter der analytisch bestimmten angenähert, die Abweichung in der letzten Klasse beträgt noch 0.0156. Auch weitere Rechnungen zeigten, daß die simulierte Verteilung nur langsam konvergiert.

Abschließend seien die Rechenzeiten für die verschiedenen Verfahren auf der IBM 7040, einer älteren Maschine, betrachtet. Denn dieses Problem gab in der Vergangenheit Anlaß, Näherungsverfahren zu entwerfen. Die Simulationsverfahren sind naturgemäß sehr rechenintensiv. Für eine Periode brauchte man bei neun Blöcken 24.4 sec, wenn die Ausfallzeiten als exponentialverteilt angenommen werden, und 46.4 sec für den alternativen Fall. Sehr viel schneller ist das analytische Verfahren (Tab. 2). Selbst bei 100 Blöcken und 137 Klassen, die sich bei den gewählten Daten ergaben, benötigte der Rechner nur 327 sec. Wenn allein die Aufgabe lautet, die VVL zu berechnen, wird man ohne Zögern das analytische Verfahren anwenden. Andererseits ermöglicht ein Simulationsmodell die Abbildung des gesamten Kraftwerksbetriebes. In Fig. 2 ist beispielhaft eine fiktive Lastkurve eingetragen. Durch ihre proportionale Verschiebung verändert man den Reservefaktor und kann so sehen, wie sich die Zahl der Systemzusammenbrüche und ihre Länge verändert, um damit Schlüsse für die notwendige Reservekapazität ziehen zu können.

Tab. 1 Kenndaten von neun Blöcken

		Block								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Leistung	x_i	150	150	150	150	150	300	150	150	150
Anzahl der Beobachtungen	n	154	117	74	90	112	71	130	85	73
Mittlere Betriebszeit	\bar{t}_B	230	317	514	431	335	389	296	472	515
Mittlere Ausfallzeit	\bar{t}_A	25.2	30.2	35.7	25.1	27.5	72.5	24.3	23.3	27.5
Betriebswahrsch.	\hat{p}_i	.901	.913	.935	.945	.924	.843	.924	.953	.949
Für die komb. Verteilung										
	λ	.102	.195	.08	.01	.036	.144	.190	.097	.097
	$\hat{\mu}$	2.39	2.27	2.68	2.52	1.32	3.17	2.44	2.60	2.53
	$\hat{\sigma}$.81	1.12	1.08	1.08	1.2	1.57	.86	.92	1.14
	\hat{f}	15.5	16.0	13.8	15.2	19.7	20.7	9.1	10.3	19.3
	\hat{k}_E	.265	.249	.320	.457	.698	.415	.136	.367	.473

Tab. 2 VVL - Nach verschiedenen Verfahren berechnet

Klasse k	Leistung x'_k	Simulation mit		Analytisch. Verfahren $f(x'_k)$	Analytisch. Verfahren $F(x'_k)$
		komb. Vert. der T_A $f(x'_k)$	Exponent. Vert. d. T_A $f(x'_k)$		
0	0	.000E-38	.000E-38	.660D-10	.660D-10
1	150	.000E-38	.000E-38	.756D-08	.762D-08
2	300	.000E-38	.000E-38	.375D-06	.383D-06
3	450	.000E-38	.000E-38	.106D-04	.110D-04
4	600	.138E-03	.146E-03	.185D-03	.196D-03
5	750	.204E-02	.141E-02	.207D-02	.227D-02
6	900	.141E-01	.140E-01	.147D-01	.170D-01
7	1050	.600E-01	.599E-01	.637D-01	.806D-01
8	1200	.156E 00	.149E 00	.162D 00	.242D 00
9	1350	.276E 00	.278E 00	.284D 00	.526D 00
10	1500	.492E 00	.498E 00	.474D 00	.100D 01
Perioden b.d. Simulation		43	29		
Rechenzeit (sec)		1996	709.6	.283	
Arithm. Mittel		1374.8	1377.1	1369.7	
Standardab- weichung		151.8	150.4	153.2	

Literatur

- 1 Trautmann, Karl Die Verfügbarkeit von elektrischen Energie-Erzeugungsanlagen - Ein Beitrag zu einigen statistischen Problemen - Dissertation, Darmstadt 1972

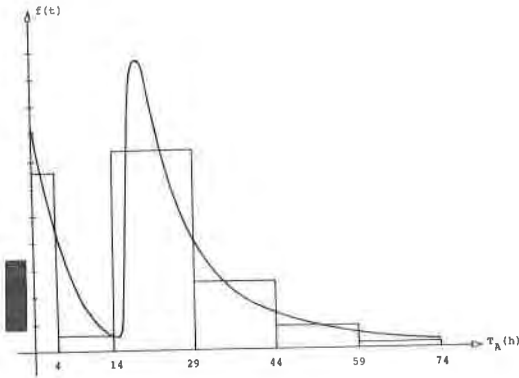


Fig. 1 Histogramm der beobachteten Ausfallzeiten eines Blockes (bis $\tau_A = 74$) und Dichtefunktion einer kombinierten Exponential-Log-Normal-Verteil.

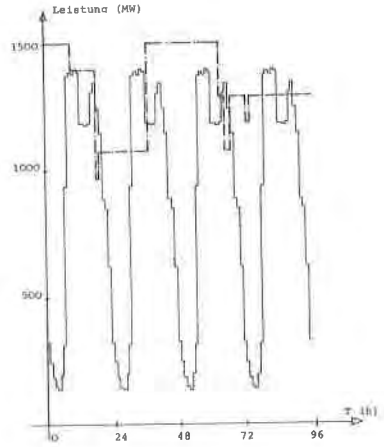


Fig. 2 Verfügbare Leistung von neun Blöcken (gestrichelt) und eine fiktive Lastkurve

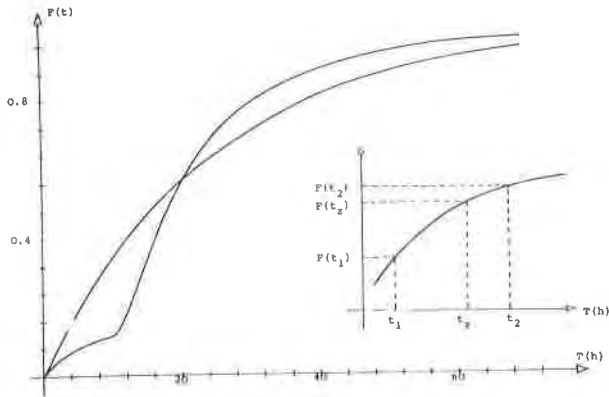


Fig. 3 Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung und der kombinierten Exponential-Log-Normal-Verteilung