

DIE SPANNUNGSVERTEILUNG IN LÄNGSBERIPPTEBEN BRENNSTABHÜLLROHREN

R. KRIEG,

Institut für Reaktorentwicklung, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Karlsruhe, Germany

ABSTRACT

The stresses in fuel element claddings are produced by fission gas, fuel, and coolant pressures, differential thermal expansions, and possibly by irradiation induced differential swelling of the cladding material. The elastic stress distribution is well known and easily obtained in rotationally symmetric fuel element claddings. However the stress analysis of claddings having integrated fins in the axial direction needs a considerably larger effort; but such an investigation is necessary because of possible stress concentrations at the roots of the fins.

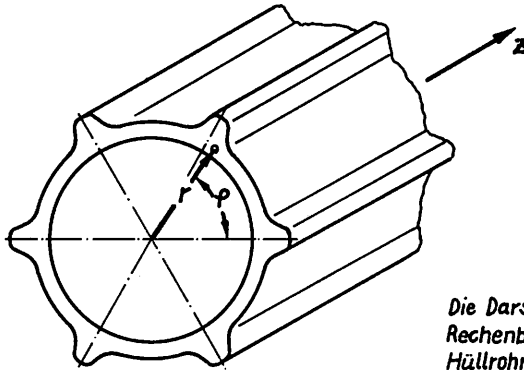
In this study a numerical method is presented which is based on Airy's stress function and suitable trigonometric series. The calculations indicate that this method gives good results for the stress distribution, if the root radius of the fins is not too small.

1. EINFÜHRUNG

Bei Brennstabhüllrohren liegen die Temperaturgradienten in axialer Richtung um Größenordnungen unter den Temperaturgradienten in radialer Richtung. Zur Ermittlung der Spannungsverteilung (einschließlich der Wärmespannungen) darf deshalb das Brennstabhüllrohr in guter Näherung als prismatischer Körper mit zweifach zusammenhängender Körperquerschnittsfläche behandelt werden, dessen physikalische Eigenschaften einschließlich der Belastungen in axialer Richtung nicht variieren, d.h. es darf von einem ebenen Verzerrungszustand ausgegangen werden.

Bei der mathematischen Behandlung dieses Problems wird ein Zylinderkoordinatensystem r, φ, z zugrunde gelegt, dessen z -Achse mit der Hüllrohrachse identisch ist. Außerdem möge die Hüllrohrquerschnittsfläche eine Symmetrieachse besitzen, welche mit der Geraden $\varphi=0$, ($z=0$) zusammenfällt (Abb. 1).

Bei der Lösung des zugehörigen Gleichungssystems zeigt sich, daß es zweckmäßig ist, zwei Fälle zu unterscheiden und beide getrennt zu behandeln. Der erste Fall umfaßt diejenigen Probleme, bei denen die Kontur der Körperquerschnittsfläche sowie das Temperaturfeld und die äußere Belastung eine mindestens zweifache Periodizität p bezüglich des Umfanges (ohne gegenseitige Phasenverschiebung) aufweisen, d.h. $p \geq 2$. Der zweite Fall umfaßt die Probleme bei denen dies nicht zutrifft.



Brennstabhüllrohr mit
6 Außenrippen ($p=6$)

Die Darstellung zeigt das dem
Rechenbeispiel zugrunde gelegte
Hüllrohr im Maßstab 10:1

Abb. 1

In der vorliegenden Arbeit wird nur der erste Fall behandelt, d. h., das Rippenrohr muß mindestens zwei geometrisch gleiche Rippen besitzen und die zu jedem Rippenbereich gehörenden Temperaturfelder müssen dieselben sein. Aus rein numerischen Gründen ist außerdem zu fordern, daß der Randkurven-Steigungswinkel γ (Abb. 2) möglichst der Bedingung $-60^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ genügt.

Unter der Annahme linear-elastischen Werkstoffverhaltens kann das Differentialgleichungssystem, welches das angegebene Problem beschreibt, exakt gelöst werden.

Voraussetzung ist, daß eine gewisse Funktion $Q(r, \varphi)$, welche sich durch Anwendung des Laplace-Operators auf das Temperaturfeld $T(r, \varphi)$ ergibt, in eine vorgegebene analytische Form gebracht wird. Dies ist im allgemeinen nur möglich, wenn man gewisse Änderungen am Temperaturfeld vornimmt. Auch den Randbedingungen kann nur dann exakt genügt werden, wenn an den vorgegebenen Randspannungen gewisse Änderungen vorgenommen werden. Durch Einführung geeigneter, in diesem Zusammenhang bisher nicht benutzter Bedingungen ist es gelungen, den genannten Änderungen (Fehlern) eine solche Form zu geben, daß sie in vielen, technisch interessanten Fällen ohne weiteres zugelassen werden können. Insbesondere verschwinden die über einen gewissen Umfangsbereich $\Delta \varphi$ gebildeten Mittelwerte der Änderungen. $\Delta \varphi$ ist dabei in der Regel recht klein.

Hervorzuheben ist, daß bei dem hier eingeschlagenen Lösungsweg gerade alle diejenigen Bedingungen (Gleichgewicht, Kompatibilität) mathematisch exakt erfüllt werden, die auch beim vorgegebenen physikalischen Problem exakt erfüllt sind. Eine exakte Einhaltung der vorgegebenen Randspannungen und des Temperaturfeldes zu verlangen, wäre dagegen physikalisch sinnlos, da diese vorgegebenen Größen ihrer Natur nach stets fehlerbehaftet sind. Da außerdem das Feld $Q(r, \varphi)$ und die Randspannungen, bei denen die hier erzielte Lösung exakt gilt, genau bekannt sind, kann diese Lösung mit Recht als quasi-exakte Lösung des vorgegebenen technischen Problems bezeichnet werden.

Im Gegensatz hierzu erfüllen die anderen bekannten Lösungsverfahren (Verfahren der finiten Elemente, Differenzenverfahren, u.s.w.) entweder die Gleichgewichtsbedingungen, oder die Kompatibilitätsbedingungen, oder beide Bedingungen nicht exakt.

Zur numerischen Bestimmung der Lösung wurde das Computerprogramm EVA 1 entwickelt. Mit diesem Programm wurden Spannungsanalysen für einige aktuelle Hüllrohre mit Längsrippen durchge-

führt. Die Ergebnisse sind im letzten Teil dieser Arbeit graphisch dargestellt. Neben Brennstabhüllrohren lassen sich mit dem Code EVAL natürlich auch viele andere Probleme behandeln, die den anfangs gemachten Voraussetzungen genügen.

Arbeiten, die ähnliche Probleme betreffen und vergleichbare Lösungswege benutzen, wurden unter anderem veröffentlicht von Sekiya und Takeuti [1, 2] und von Takeuti und Sumi [3]. Da diese Autoren jedoch die Randbedingungen nur mit Hilfe der bekannten Kollokationsmethoden zu erfüllen versuchen, gelingt es ihnen nur in sehr einfachen Fällen, die Abweichungen zwischen den vorgegebenen und den sich aus der Lösung ergebenden Randspannungen genügend klein zu halten. Aus diesem Grunde benutzen Takeuti und Noda in einer neueren Arbeit [4] komplexe Variable zur Lösung des Problems. Bei dieser Methode müssen die Ränder mit Hilfe konformer Abbildungen aus Kreisen hervorgehen. Es wird sofort klar, daß nunmehr das Problem darin besteht, eine hinreichend gute Übereinstimmung zwischen den vorgegebenen und den sich bei der konformen Abbildung ergebenden Randkurven zu erzielen. Dies wird offenbar nur bei gewissen, sehr einfachen Konturen erreicht (z.B. polygon-artige Randkurven).

2. GRUNDGLEICHUNGEN

Die Grundgleichungen stellen ein System von Beziehungen (Feldgleichungen und Randbedingungen) dar, welches zur eindeutigen Bestimmung

des sich einstellenden Spannungstensors

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\varphi z} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

des sich einstellenden Verzerrungstensors

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\varphi} & \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{r\varphi} & \epsilon_{\varphi\varphi} & \epsilon_{\varphi z} \\ \epsilon_{rz} & \epsilon_{\varphi z} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

und des sich einstellenden Verschiebungsvektors

$$(u_r \quad u_\varphi \quad u_z)$$

in jedem Körperpunkt ausreicht.

Da das Rippenrohr einem ebenen Verzerrungszustand unterliegen soll und am Rippenrohr keine Torsionsmomente angreifen mögen, verschwinden σ_{rz} , $\sigma_{\varphi z}$ und ϵ_{rz} , $\epsilon_{\varphi z}$ identisch. Die Grundgleichungen zur Bestimmung der verbleibenden 11 unbekanntten Feldgrößen lauten damit wie folgt (siehe z.B. [5], Seite 186):

Gleichgewichtsbedingungen (Volumenkräfte mögen verschwinden)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \sigma_{rr}) - \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \sigma_{r\varphi}) + \sigma_{r\varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \epsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Hookesches Gesetz

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})] + \beta(T) \\
 \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] + \beta(T) \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] + \beta(T) \\
 \epsilon_{r\varphi} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\varphi}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

E ist der Elastizitätsmodul

ν ist die Querkontraktionszahl

$T(r, \varphi)$ ist ein vorgegebenes Temperaturfeld, das mit Wärmequellen behaftet sein darf.

$\beta(T)$ ist eine dem Körper aufgeprägte, im allgemeinen von der Temperatur abhängige zusätzliche Dehnung. In dem vorliegenden Problem setzt sich $\beta(T)$ zusammen aus der Wärmedehnung und dem Materialschwellen, verursacht durch Bestrahlung mit schnellen Neutronen. Näheres hierzu ist beispielsweise den Arbeiten von Cloudson [6] zu entnehmen.

Bei der Herleitung der Beziehungen (2.1) - (2.3) wurde vorausgesetzt, daß die Verzerrungen und Rotationen klein gegen 1 sein sollen.

Außer diesen Gleichungen, welche in jedem Körperpunkt, d. h. in jedem Punkt der Körperquerschnittsfläche erfüllt sein müssen, sind in den Randpunkten noch gewisse zusätzliche Bedingungen (Randbedingungen) zu erfüllen. Im vorliegenden Fall sollen die Normal- und Schubspannungsvektoren in jedem Punkt der inneren und äußeren Randkurve vorgegeben sein. Ist $r_i(\varphi)$ der Radius, $\gamma_i(\varphi)$ die Randneigung, $\sigma_i(\varphi)$ der Normalspannungsvektor und $\tau_i(\varphi)$ der Tangentialspan-

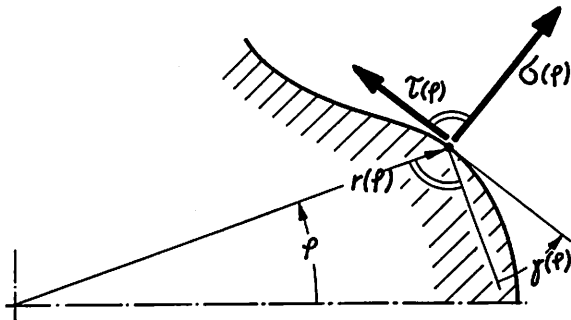


Abb. 2

nungsvektor an der inneren Randkurve, so gilt folgende Beziehung (siehe z.B. [7], Abschn.9):

$$\begin{aligned} \sigma_i(\rho) &= \sigma_{rr}(r_i(\rho), \rho) \cdot \cos^2(\gamma_i(\rho)) + \sigma_{\theta\theta}(r_i(\rho), \rho) \cdot \sin^2(\gamma_i(\rho)) + \\ &\quad + \sigma_{r\theta}(r_i(\rho), \rho) \cdot \sin(2\gamma_i(\rho)) \\ \tau_i(\rho) &= \frac{1}{2} [-\sigma_{rr}(r_i(\rho), \rho) + \sigma_{\theta\theta}(r_i(\rho), \rho)] \cdot \sin(2\gamma_i(\rho)) + \\ &\quad + \sigma_{r\theta}(r_i(\rho), \rho) \cdot \cos(2\gamma_i(\rho)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ganz Entsprechendes gilt für die äußere Randkurve. (Index "a")

Ferner sei die Axialkraft K, d.h. die mittlere Axialspannung

$$K = \iint_F \sigma_{zz} dF \quad (2.5)$$

vorgegeben. F ist die Körperquerschnittsfläche.

Gemäß den Ausführungen von Boley and Weiner [8], Abschn. 2.7 existiert für das oben angegebene Problem eine eindeutige Lösung.

3. ELIMINATION DER VERSCHIEBUNGEN

Bei der Lösung der im vorhergehenden Abschnitt definierten Randwertaufgabe ist es zweckmäßig, in dem Gleichungssystem, welches aus den Beziehungen (2.1) - (2.5) besteht, die Verschiebungen zu eliminieren, da diese in den Randbedingungen nicht vorkommen. Man erreicht dies am einfachsten durch Weglassen der Gl. (2.2). Durch Einführung geeigneter Bedingungen hat man dann aber sicherzustellen, daß die gesuchte Lösung die Existenz eines eindeutigen Verschiebungsfeldes gewährleistet.

Solche Bedingungen sind aus der Literatur bekannt. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die von Leipholz in [5] und von Szabó in [9] darüberhinaus aber auch in vielen anderen Abhandlungen angegebenen sogenannten Kompatibilitätsbedingungen die Existenz eines eindeutigen Verschiebungsfeldes nur dann gewährleisten, wenn der Körper einfach zusammenhängend ist. Auf diese wichtige Einschränkung wird in diesen Abhandlungen leider nicht immer aufmerksam gemacht.

Um hinreichende Bedingungen für die eindeutige Existenz eines Verschiebungsfeldes bei mehrfach zusammenhängenden Körpern zu erhalten, muß neben den Kompatibilitätsbedingungen nach [5], [9] u.s.w., noch gewissen Zusatzbedingungen genügt werden. Diese Zusatzbedingungen - auch Michell-Bed. oder Cesàro-Integrale genannt - werden unter anderem angegeben in [10, 11], ferner von Boley and Weiner in [8].

Bei dem hier vorliegenden Problem (ebener Verzerrungszustand, zweifach zusammenhängende Körperquerschnittsfläche¹⁾ und mindestens zweifache Periodizität der physikalischen Eigen-

1) Wird das Problem mit Hilfe eines Polar- bzw. Zylinderkoordinatensystems beschrieben und befindet sich der Koordinatenursprung im Innern jenes Bereiches, der von der äußeren Randkurve eingeschlossen wird, so ist die Körperquerschnittsfläche stets als mindestens zweifach zusammenhängend zu betrachten, da der Koordinatenursprung ein singulärer Punkt ist und nicht der Körperquerschnittsfläche angehören darf.

schaften bezüglich des Rohrfanges) lauten die Bedingungen, welche für die Existenz des Verschiebungsfeldes notwendig und hinreichend sind, wie folgt:

(Kompatibilitäts-Bed. nach [5], [9] u.s.w.)

$$2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r \cdot \epsilon_{r\varphi}) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \epsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \epsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial \epsilon_{rr}}{\partial r} = 0$$

$$\epsilon_{zz} = k_0 = \text{const.} \quad (3.1)$$

(Michell-Bed., bzw. Cesàro-Integrale)

$$\int_0^{2\pi} (\epsilon_{rr} - \epsilon_{\varphi\varphi} - r \frac{\partial \epsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r}) d\varphi = 0 \quad (3.2)$$

Integrationsweg ist ein Kreis mit dem Radius r , welcher zwischen innerer und äußerer Randkurve der Körperquerschnittsfläche verläuft.

Mit (2.1), (2.3), (3.1) und (3.2) sowie den Randbedingungen (2.4) und (2.5) hat man ein dem Grundgleichungssystem äquivalentes Gleichungssystem gewonnen, das die Verschiebungen nicht mehr explizit enthält.

4. ELIMINATION DER VERZERRUNGEN

Zuerst sollen die in der ersten Gleichung von (3.1) auftretenden Verzerrungen mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes (2.3) substituiert werden. Hierbei ist zu beachten, daß zufolge der zweiten Gleichung von (3.1) und der dritten Gleichung von (2.3) gilt:

$$\epsilon_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) + E \cdot k_0 - E \cdot \beta(T) \quad (4.1)$$

Die noch freie Konstante k_0 läßt sich aus der vorgegebenen Axialkraft K wie folgt berechnen

$$k_0 = \frac{K}{E \cdot F} - \frac{1}{E \cdot F} \iint_p \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) dF + \frac{1}{F} \iint_p \beta(T) dF \quad (4.2)$$

was man durch Einsetzen von (4.1) in (2.5) bestätigt.

Formt man die aus der ersten Gleichung von (3.1) hervorgegangene Beziehung unter Benutzung der Gleichgewichtsbed. (2.1) noch weiter um, so erhält man schließlich:

$$\Delta (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{E}{1-\nu} \Delta (\beta(T)) = 0 \quad (4.3)$$

Δ ist der Laplace-Operator

Nun sollen auch die Verzerrungen in der Bedingung (3.2) eliminiert werden. Unter Benutzung des Hookeschen Gesetzes (2.3) und der Beziehung (4.1) schreibt sich die Bedingung (3.2):

$$\frac{1}{E} \int_0^{2\pi} \left[\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + \nu \cdot r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - (1-\nu) \cdot r \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} r \frac{\partial \beta(T)}{\partial r} d\varphi \quad (4.4)$$

Der Integrationsweg ist derselbe wie bei der Formulierung (3.2)

Die Gleichgewichtsbedingungen (2.1) zusammen mit den Gleichungen (4.3) und (4.4) sowie den Randbedingungen (2.4) und (2.5) stellen jetzt die neu-gewonnene Formulierung der Randwertaufgabe dar. In den genannten Beziehungen treten nur noch die Spannungen σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ und $\sigma_{r\varphi}$ als Unbekannte auf.

5. EINFÜHRUNG DER AIRYSCHEN SPANNUNGSFUNKTIONEN

Definiert man eine innerhalb und auf den Rändern der Körperquerschnittsfläche mindestens viermal differenzierbare Funktion $\phi(r, \varphi)$ und verlangt, daß

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (5.1)$$

gilt, so werden die Gleichgewichtsbedingungen (2.1) identisch erfüllt. $\phi(r, \varphi)$ ist die Airysche Spannungsfunktion.

Die Gleichung (4.3) geht mit der Definition (5.1) über in die Bipotentialgleichung:

$$\Delta^2(\phi) = Q(r, \varphi) \quad (5.2)$$

mit

$$Q(r, \varphi) = -\frac{E}{1-\nu} \Delta(\beta(T)) = -\frac{E}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^2} \right)$$

Damit hat man das vorgegebene Problem auf die Lösung einer einzigen partiellen inhomogenen Differentialgleichung vierter Ordnung - nämlich der Bipotentialgleichung (5.2) - zurückgeführt.

Die zugehörigen Randbedingungen erhält man aus den anfangs formulierten Randbedingungen (2.4) durch Einsetzen der Gleichungen (5.1). Auf die Wiedergabe der so entstehenden Beziehungen sei an dieser Stelle verzichtet. Außer diesen Randbedingungen existiert noch eine Nebenbedingung (Michell-Bed.). Man erhält sie durch Umformung der Beziehung (4.4) mit Hilfe der Gleichungen (5.1):

$$\frac{1-\nu}{E} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - r \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} r \frac{\partial \beta(T)}{\partial r} d\varphi \quad (5.3)$$

Bei der Umformung wurde berücksichtigt, daß $\phi(r, \varphi) = \phi(r, \varphi + 2\pi)$ ist.

Anmerkung:

Ist $\beta(T) = \alpha T$, wobei α eine Konstante darstellt (Wärmedehnungskoeffizient), ist ferner die Wärmeleitfähigkeit λ eine Konstante, so erhält man unter Beachtung der Fourier-Kirchhoffschen Wärmeleitgleichung:

$$Q(r, \varphi) = \frac{E}{1-\nu} \frac{\alpha}{\lambda} \cdot q(r, \varphi)$$

$q(r, \varphi)$ ist die Wärmeerzeugung pro Zeit und Volumen

Außerdem wird:

$$\int_0^{2\pi} r \frac{\partial \beta(T)}{\partial r} d\varphi = -\frac{\alpha}{\lambda} q_0$$

q_0 ist die Wärmemenge, die pro Zeit und Hüllrohrlänge vom Rohrrinnern zum Rohrräußern übergeht.

Verschwinden $q(r, \varphi)$, q_0 und die Randspannungen, so verschwindet auch $\phi(r, \varphi)$ und das Hüllrohr ist spannungsfrei mit Ausnahme der Axialspannungen. Dies läßt sich leicht anhand obiger Beziehungen sowie der Gleichungen (5.1), (5.2), (5.3) und (2.4) verifizieren.

6. LÖSUNG DER BIPOTENTIALGLEICHUNG

Es läßt sich zeigen, daß die Airysche Spannungsfunktion ϕ unter Beachtung der anfangs gemachten Voraussetzungen von der folgenden Form sein muß:

$$\phi(r, \varphi) = \frac{1}{2} A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cdot \cos(n p \varphi) \quad (6.1)$$

p ist die Periodizität des Problems ($p = 2, 3, 4, \dots$).

Setzt man (6.1) in der Bipotentialgleichung (5.2) ein, so erhält man für jede neu eingeführte Funktion $A_0(r), A_1(r), A_2(r), \dots$ eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$A_n'''' + 2 \frac{1}{r} A_n''' - (2n^2 p^2 + 1) \frac{1}{r^2} A_n'' + (2n^2 p^2 + 1) \frac{1}{r^3} A_n' + (n^4 p^4 - 4n^2 p^2) \frac{1}{r^4} A_n = - \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta(B(\tau)) \cdot \cos(n p \varphi) d\tau$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ (6.2)

"' " bedeutet $\frac{\partial}{\partial r}$

Die rechte Seite von (6.2) ist eine Funktion von r und muß definiert sein im Intervall $r_1 \leq r \leq r_2$

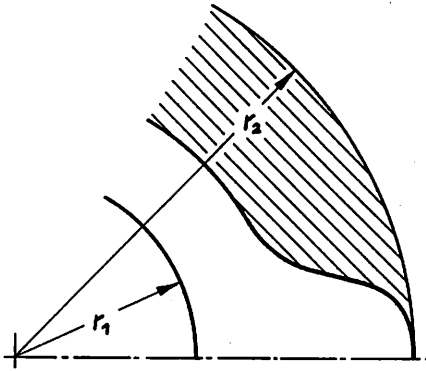


Abb. 3

Der Definitionsbereich der Temperatur $T(r, \varphi)$ muß deswegen durch Hinzunahme einer beliebig vorgehenden, fiktiven Temperaturverteilung in dem schraffierten Bereich (Abb. 3) auf die Ringfläche mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 erweitert werden.

Ersetzt man die rechte Seite in (6.2) durch ein Näherungspolynom vom Grade L ($L \geq 0$)

$$- \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta(B(\tau)) \cdot \cos(n p \varphi) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, \varphi) \cdot \cos(n p \varphi) d\varphi = \sum_{l=0}^L P_{nl} r^l \quad (6.3)$$

so lassen sich die inhomogenen Eulerschen Differentialgleichungen (6.2) exakt lösen:

$$A_0(r) = a_{01} + a_{02} \ln r + a_{03} r^2 + a_{04} r^2 \ln r + \sum_{l=0}^L \frac{1}{l(l+4)^3 + 4(l+4)^2} P_{0l} r^{l+4}$$

$$A_n(r) = a_{n1} r^{np} + a_{n2} r^{-np} + a_{n3} r^{2+np} + a_{n4} r^{2-np} + \quad (6.4)$$

$$+ \sum_{l=0}^L \frac{1}{l(l+4)^3 + (4-2n^2 p^2)(l+4)^2 + 4n^2 p^2(l+3) + n^4 p^4} P_{nl} r^{l+4}$$

($l \neq np-2$; $l \neq np-4$)

$$+ \frac{P_{n, np-2}}{8np(n+1)} r^{n+2} \ln r - \frac{P_{n, np-4}}{8np(n-1)} r^n \ln r$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Die Angabe $l \neq np-2$ und $l \neq np-4$ unter dem Summationszeichen bedeutet, daß bei der Summation die Glieder mit dem Index $l = np-2$ und $l = np-4$ auszulassen sind

Die ersten vier Glieder rechts vom Gleichheitszeichen stellen jeweils die homogene Lösung dar. Letztere wird auch von Timoshenko und Goodier in [7] Seite 116 angegeben.

$a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}$ sind Integrationskonstanten, die so bestimmt werden müssen, daß den Randbedingungen (2.4) und der Nebenbedingung (5.3) genügt wird.

Sind die Integrationskonstanten bekannt, so ist mit (6.4), (6.1) (5.1), (4.1) und (4.2) auch das Spannungsfeld gegeben. Aus dem Spannungsfeld folgt, unter Beachtung von (2.3) dann das Verzerrungsfeld und aus letzterem läßt sich durch Integration das Verschiebungsfeld gewinnen. Die zur Durchführung der Integration erforderlichen Beziehungen erhält man durch Umformung der Gleichungen (2.2). Dabei zeigt sich, daß eine Beziehung überzählig ist. Da die zur Sicherung der Kompatibilität erforderlichen Bedingungen (3.1) und (3.2) beachtet wurden, steht die überzählige Beziehung nicht im Widerspruch zu den restlichen Beziehungen, welche zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes erforderlich sind.

7. BESTIMMUNG DER INTEGRATIONSKONSTANTEN

Zuerst soll untersucht werden, welche Restriktionen bezüglich der Integrationskonstanten aus der Nebenbedingung (5.3) folgen. Nach Einsetzen von (6.1) und (6.4) und einigen Umformungen, liefert die Nebenbedingung (5.3) eine Bestimmungsgleichung für die Integrationskonstante a_{04} :

$$a_{04} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{l=0}^L \frac{1}{l+2} P_{0l} r^{l+2} + \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{2\pi_0} \int_0^{2\pi} r \frac{d(\beta(\tau))}{d\tau} d\tau \right] \quad (7.1)$$

Integrationsweg ist ein Kreis mit dem Radius r ($r_1 \leq r \leq r_2$)

Beachtet man noch, daß $a_{01} = 0$ gesetzt werden darf, weil diese Integrationskonstante keinen Einfluß auf die gesuchte Lösung hat, so bleiben mit Hilfe der Randbedingungen (2.4) nur noch die Integrationskonstanten

$$a_{02}, a_{03} \quad \text{ferner} \quad a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

zu bestimmen.

Formt man die Randbedingung (2.4) unter Benutzung von (5.1), (6.1) und (6.3) um, so erhält man:

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m [SF_m(\varphi)]_i = S_i(\varphi) ; \quad \sum_{m=1}^{\infty} X_m [TF_m(\varphi)]_i = T_i(\varphi) \quad \dots$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m [SF_m(\varphi)]_a = S_a(\varphi) ; \quad \sum_{m=1}^{\infty} X_m [TF_m(\varphi)]_a = T_a(\varphi) \quad (7.2)$$

Hierin bedeutet:

$$X_1 = a_{02} , \quad X_2 = a_{03}$$

$$X_{4n-1} = a_{n1} , \quad X_{4n} = a_{n2} , \quad X_{4n+1} = a_{n3} , \quad X_{4n+2} = a_{n4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{array}{ll} [SF_m(\varphi)]_i & \text{und} \quad [TF_m(\varphi)]_i \\ [SF_m(\varphi)]_a & \text{und} \quad [TF_m(\varphi)]_a \end{array} \quad \text{berechnen sich aus} \quad \begin{array}{l} r_i(\varphi), y_i(\varphi) \\ r_a(\varphi), y_a(\varphi) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} S_i(\varphi) & r_i(\varphi), y_i(\varphi), \zeta_i(\varphi) \\ T_i(\varphi) & r_i(\varphi), y_i(\varphi), \tau_i(\varphi) \\ S_a(\varphi) & r_a(\varphi), y_a(\varphi), \zeta_a(\varphi) \\ T_a(\varphi) & r_a(\varphi), y_a(\varphi), \tau_a(\varphi) \end{array} \quad \text{berechnen sich aus} \quad \text{ferner aus } a_{04} \text{ und } P_{nl}$$

Wegen des Umfanges der jeweiligen Beziehungen sei hier auf ihre Wiedergabe verzichtet. Denkt man sich (7.2) für jeden Wert φ im Intervall $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ¹⁾ angeschrieben, so hat man ein lineares Gleichungssystem gewonnen, bestehend aus unendlich vielen Gleichungen für unendlich viele unbekannte Integrationskonstanten X_m .

Bricht man dagegen die Fourier-Entwicklung (6.1) nach $n=N$ ab ($N \geq 0$), so hat man noch $4N+2$ unbekannte Integrationskonstanten.

Die zu ihrer Bestimmung erforderlichen $4N+2$ linearen Gleichungen kann man erhalten, wenn man die Erfüllung von (7.2), d.h. die Erfüllung der Randbedingungen nur in insgesamt $2N+1$ ausgewählten Randpunkten verlangt. Auf dieser Basis durchgeführte Rechnungen zeigen jedoch, daß in den übrigen Randpunkten die Randbedingung (7.2) häufig sehr stark verletzt wird. Nur in gewissen einfachen Fällen und bei kleinen Werten von N ist dieser Fehler tragbar.

(vergl. [2, 3, 4, 7])

Derselbe Effekt tritt auch dann auf, wenn man in den Beziehungen (7.2) beidseitig eine Fourierentwicklung durchführt und die Übereinstimmung der entsprechenden Fourierkoeffizienten bis zur Ordnung N verlangt.

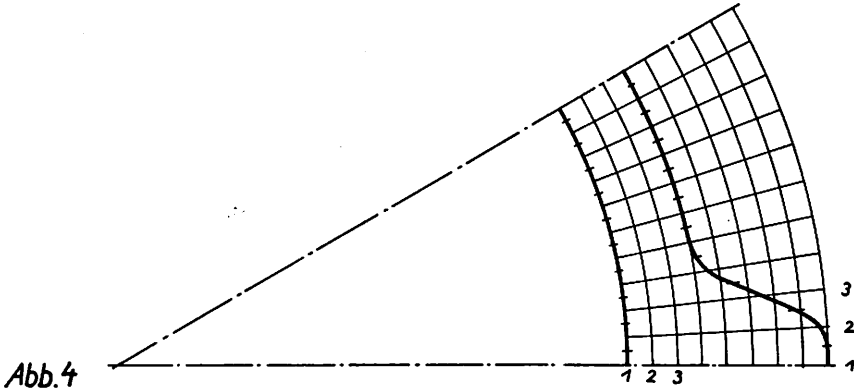
Erst eine dritte Methode führt zum Erfolg. Sie besteht darin, daß die Übereinstimmung der Fourierkoeffizienten nur bis zu einer Ordnung NL ($NL \leq N$) verlangt wird. Die noch fehlenden linearen Gleichungen zur Bestimmung von X_m gewinnt man aus der Bedingung, daß das Integral über das Quadrat des Randspannungsfehlers ein Minimum sein soll. Hierbei hat man noch die Möglichkeit diesen Randspannungsfehler in gewissen Randabschnitten durch geeignete Verteilung von Gewichten besonders klein zu machen. Der Randspannungsfehler ist die Abweichung des sich einstellenden Randspannungsvektors von dem vorgegebenen Randspannungsvektor.

.....
 1) Wegen der Periodizität und Symmetrie genügt es, die Erfüllung von (7.2) in diesem Intervall zu verlangen.

8. NUMERISCHE DURCHFÜHRUNG DER RECHNUNG

Zur numerischen Durchführung der Rechnungen wurde der Code EVAL entwickelt. Seine wesentlichsten Merkmale werden im folgenden kurz erläutert.

Der Körperquerschnittsfläche wird ein Polarkoordinatennetz zugeordnet, mit maximal $60 \cdot 2p$ äquidistanten radialen und maximal 35 äquidistanten azimutalen Netzlinien.



Die Temperaturverteilung $T(r, \varphi)$ wird als diskretes Wertefeld in den Schnittpunkten des Polarkoordinatennetzes vorgegeben.

Die von der Temperatur abhängige Dehnung $\beta(T)$ muß ein Polynom sein,

$$\beta(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \alpha_3 T^3 + \alpha_4 T^4$$

$\alpha_0, \dots, \alpha_4$ sind Konstanten

dessen maximaler Grad gleich oder kleiner vier ist.

Bei der Anwendung des Laplace-Operators auf das Feld $\beta(T(r, \varphi))$ zur Bestimmung von $Q(r, \varphi)$ und bei der Auswertung der Formel (7.1) sind Differentiationen bezüglich r und φ erforderlich. Sie werden näherungsweise ersetzt durch entsprechende Differenzenquotienten, wobei die Differenzen über die Maschenweiten gebildet werden. Die Koeffizienten P_{ni} des Näherungspolynoms werden mit Hilfe der Bedingung bestimmt, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum sein soll. Hierbei zeigt sich, daß der maximale Grad L des Näherungspolynoms nicht größer als acht sein darf, weil andernfalls die Rechengenauigkeiten selbst bei Verwendung von Zahlen mit 16 signifikanten Stellen zu groß werden.

Bei der Fourier-Entwicklung der Airyschen Spannungsfunktion (6.1) können Glieder bis einschließlich der Ordnung $28p$ berücksichtigt werden. Demgegenüber brechen Takeuti und Sekiya [2] sowie Takeuti und Sumi [3] bereits nach der Ordnung $4p$ ab.

Zur Vorgabe der Randbedingungen wird die Anzahl der äquidistanten radialen Netzlinien verdoppelt. Radius, Randneigung, Normalspannung und Schubspannung sowohl der inneren als auch der äußeren Randkurve werden für jede radiale Netzlinie angegeben. Will man in gewissen Randabschnitten diese vorgegebene Randbedingungen besser (schlechter) erfüllen als in den übrigen Randabschnitten, so muß in diesen Abschnitten ein Gewichtungsfaktor >1 (<1) angegeben werden.

Die Ausgabe der Ergebnisse umfaßt die folgenden Spannungsfelder, welche als diskrete Wertefelder in den Schnittpunkten des Polarkoordinatennetzes angegeben sind:

- Radialspannung
- Tangentialspannung
- Axialspannung
- Schubspannung
- Vergleichsspannung nach v. Mises

Das Vergleichsspannungsfeld kann auf Wunsch mit Hilfe einer Plotausgabe als Höhenlinienbild dargestellt werden.

Die errechneten Spannungsverteilungen gelten exakt für einen Randspannungsverlauf, der von dem oben vorgegebenen etwas abweicht. Dieser abweichende Randspannungsverlauf wird zusammen mit den anderen sich am Rande ergebenden Spannungen ausgedruckt und geplottet.

Außerdem wird die Fehlerverteilung angegeben, welche dadurch entsteht, daß das Feld $Q(r, \rho)$ mit Hilfe des Näherungspolynoms (6.3) in eine analytische Funktion verwandelt wird.

9. RECHENBEISPIELE

Fall A:

Den Berechnungen lag ein außenberipptes Brennstabhüllrohr mit den folgenden Abmessungen zugrunde:

Rippenanzahl	6	Elastizitätsmodul	$1.7 \cdot 10^4$ kp/mm ²
Rohrinnendurchmesser	4.1 mm	Querkontraktionszahl	0.3
Rohrwandstärke	0.3 mm	Wärmeleitfähigkeit	0.0454 cal/cm sec grd
Rippenhöhe	0.35 mm	Innendruck	100 at
Rippenfußausrundungsradius	0.4 mm	Außendruck	0
Max. Steig. der Rippenflanke	57,7°	Stableistung	126,7 cal/cm sec

Einzelheiten der Rohrquerschnittskontur sind der Abb. 5 zu entnehmen. Es wurde ferner angenommen, daß die durch den schnellen Neutronenfluß hervorgerufene Schwelldehnung eine lineare Funktion der Temperatur ist:

$$\text{Schwelldehnung} = \alpha_{sh} \cdot T(r, \rho)$$

$$\text{mit } \alpha_{sh} = 175 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$$

Für die Wärmedehnung wurde ebenfalls ein lineares Gesetz angenommen:

$$\text{Wärmedehnung} = \alpha_w \cdot T(r, \rho)$$

$$\text{mit } \alpha_w = 17.6 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$$

d.h., $\beta(T)$ ergab sich wie folgt:

$$\beta(T) = (\alpha_{sh} + \alpha_w) \cdot T(r, \rho)$$

Zur Bestimmung des Temperaturfeldes stand ein Rechenprogramm zur Verfügung.

Die wichtigsten mit dem Code EVAL errechneten Spannungsverteilungen sind in Abb. 5 dargestellt.

Man erkennt deutlich die Erhöhung der Tangentialspannung infolge Kerbwirkung am Rippenfuß. Wollte man diese Spannungsspitze abbauen, so wäre es am zweckmäßigsten, nur in diesem relativ eng begrenzten Bereich den Ausrundungsradius zu vergrößern. Im restlichen Rippenfußbereich könnte dagegen der Ausrundungsradius gegebenenfalls noch verkleinert werden. Durch wiederholte Rechnung ließe sich so die bezüglich der Spannungsverteilung optimale Rippenform ermitteln.

Am Rippenkopf sind die Tangentialspannungen, wie zu erwarten, fast identisch Null. Die dort vorhandenen kleinen Schwankungen sind die Folgen der fehlerhaften Erfüllung der Randbedingungen.

Interessant ist auch die Verminderung der Tangentialspannung am Innenrand der Rohrquerschnittsfläche, verursacht durch die Stützwirkung der Rippe.

Die Vergleichsspannung, ermittelt nach von Mises, ist mit Hilfe eines Höhenlinienbildes in der gesamten Querschnittsfläche wiedergegeben. Ein Zwölftel der Rohrquerschnittsfläche ist hierzu abgewickelt gezeichnet.

Von besonderer Bedeutung für die Genauigkeitsbeurteilung ist der Verlauf der Normal- und Schubspannung an den Rändern der Rohrquerschnittsfläche. Die erzielten Ergebnisse gelten für diesen Verlauf, der von dem vorgegebenen Verlauf (Randbedingungen) etwas abweicht, exakt. Anhand der beiden Normal- und Schubspannungskurven für den Außenrand bestätigt man, daß diese Randspannungsabweichungen praktisch ohne jede Bedeutung sind. (Die Spannungsmaßstäbe für Tangential- und Axialspannung einerseits und Normal- und Schubspannung andererseits, unterscheiden sich um den Faktor 20!). Am Innenrand sind die Abweichungen von den vorgegebenen Randspannungen noch wesentlich kleiner als am Außenrand.

Fall B:

Um den Einfluß der Kerbwirkung am Rippenfuß zu studieren und um die Anwendbarkeit des Codes auch bei weniger glatten Randkurven zu demonstrieren, wurden die Abmessungen wie folgt geändert:

Rippenhöhe	0.5 mm
Rippenfußausrundungsradius	0.25 mm
Maximale Steigung der Rippenflanke	62,7 °

Die unter diesen geänderten Bedingungen erzielten Ergebnisse sind in Abb. 6 dargestellt. Der Fehler bei der Erfüllung der Randbedingungen ist im Fall B wesentlich größer als im zuvor behandelten Fall A. Insbesondere sind die Randbedingungen am Rippenkopf so stark verletzt, daß in diesem Bereich keine sinnvollen Ergebnisse erhalten werden. Da jedoch die Randbedingungen, gemittelt über einem Umfangswinkel $\Delta\varphi$ (im vorliegenden Beispiel ist $\Delta\varphi \approx 1,58^\circ$), exakt erfüllt werden, wirken sich diese Fehler nur örtlich aus. Deshalb ist die errechnete Spannungsverteilung in den anderen Bereichen der Rippenrohrquerschnittsfläche durchaus brauchbar. So ist z.B. deutlich zu erkennen, daß die Tangentialspannungsspitze am Rippenfuß, verursacht durch die Kerbwirkung, hier stärker ausgeprägt ist, als in dem zuvor behandelten Fall A.

Neben diesen beiden Aufgabestellungen wurden schließlich auch solche Probleme mit Erfolg behandelt, bei denen $\beta(\tau)$ eine nichtlineare Funktion ist. Auf die Darstellung der erzielten Ergebnisse wird hier verzichtet.

Zum Schluß sei noch daraufhin gewiesen, daß die in den beiden Rechenbeispielen erzielten Spannungen, weit über der Fließgrenze liegen. Dies bedeutet, daß im Gegensatz zu den anfänglichen Voraussetzungen, das Hookesche Gesetz nicht mehr gilt. Die für die Spannungen erhaltenen Zahlenwerte sind somit unrealistisch. Sie stellen in den vorliegenden Beispielen lediglich ein Maß für die Werkstoffbeanspruchung dar.

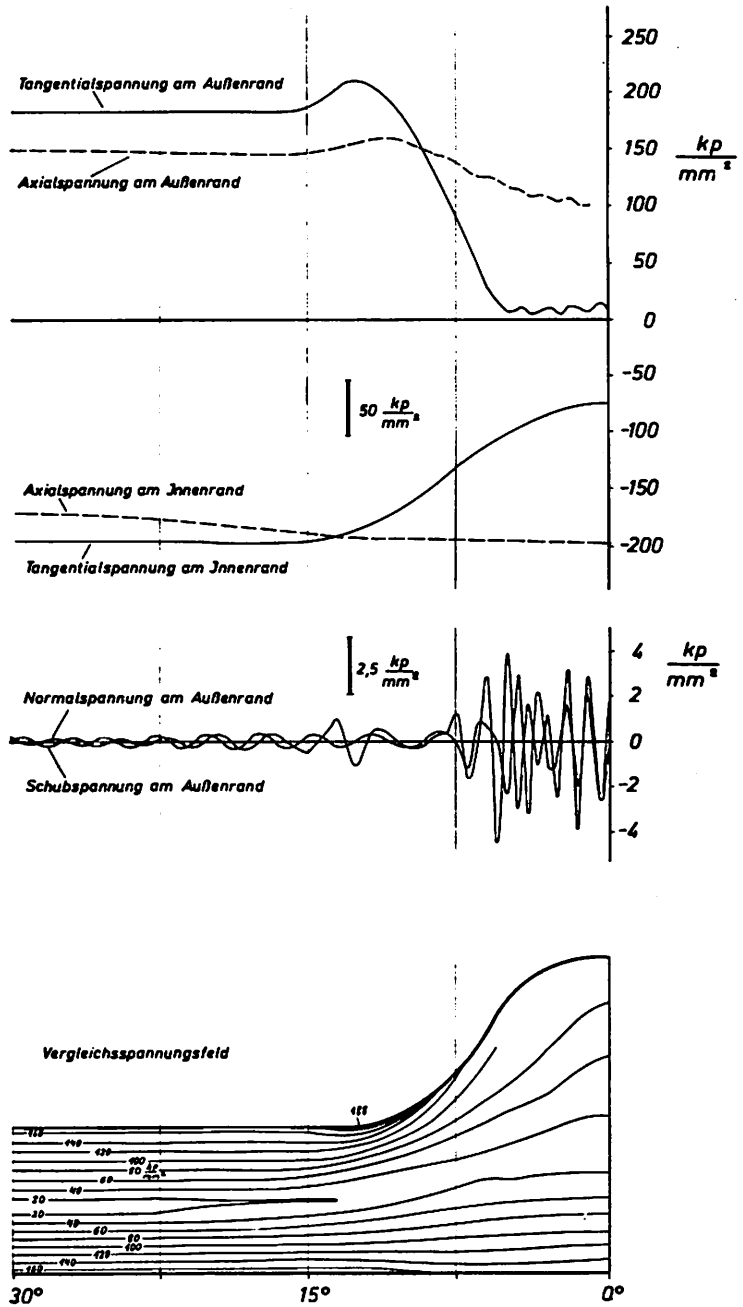


Abb.5: Spannungsverteilung im Hüllrohr, Fall A

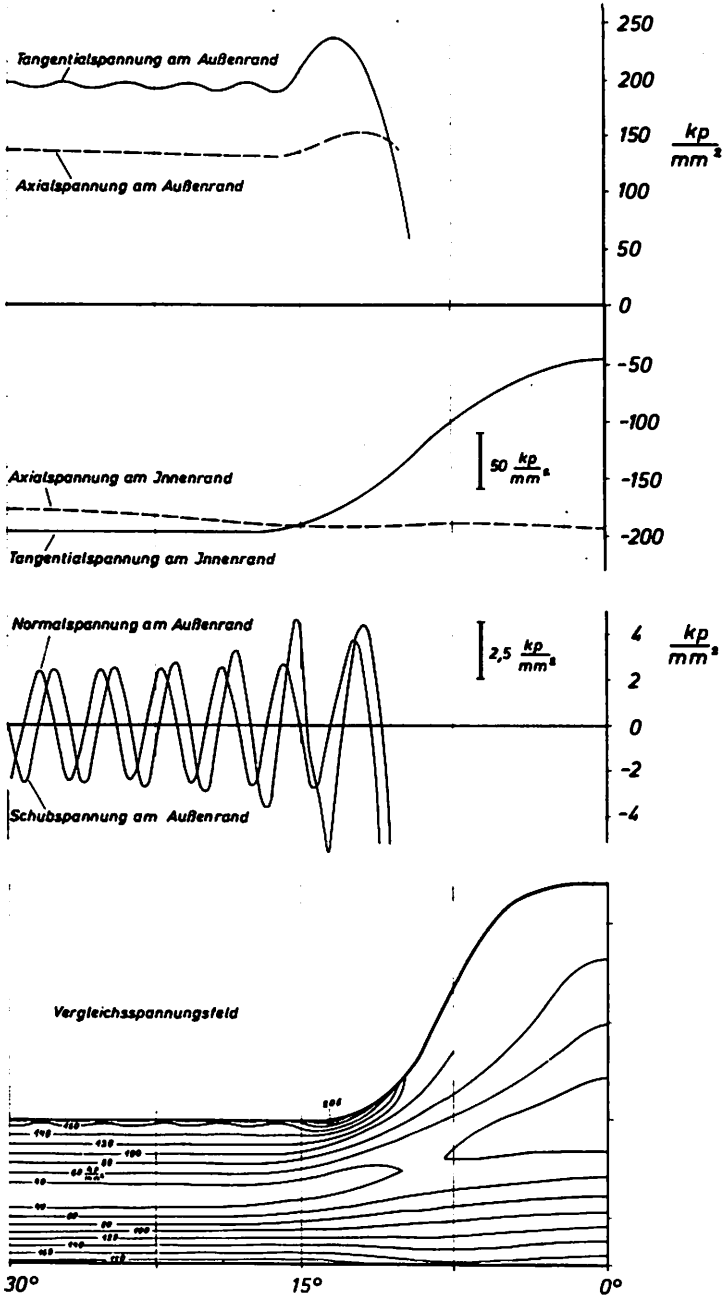


Abb. 6: Spannungsverteilung im Hüllrohr, Fall B

- Literatur: 1 Sekiya, T. and Takeuti, Y.:
Approximate Solutions of Thermal Stress Problems in Plane Elasticity
Proc. of the 8th Japan National Congress for Appl. Mech., 1958
- 2 Takeuti, Y. and Sekiya, T.:
Thermal Stresses in a Polygonal Cylinder with a Circular Hole under Internal
Heat Generation
ZAMM 48 (1968) Heft 4, S. 237 - 246
- 3 Takeuti, Y. and Sumi, N.:
Steady-state Thermoelastic Problem for a Triangular Prism with a Circular Hole
under Non-uniform Heat Generation
Int. J. Engng. Sci. Vol. 6 pp. 539 - 547 (1968)
- 4 Takeuti, Y. and Noda, N.:
Thermal Stresses in a Heat-generating Cylinder Containing a Polygonal Hole
ZAMM 50 (1970), S. 587 - 592
- 5 Leipholz, H.:
Einführung in die Elastizitätstheorie
G. Braun, Karlsruhe
- 6 Cloudson, T. T.:
Irradiation Induced Swelling and Creep in Fast Reactor Materials, Int. ANS-KTG-
Meeting on Fast Reactor Fuel and Fuel Elements,
Karlsruhe, Sept. 28 - 30, 1970
- 7 Timoshenko and Goodier:
Theory of Elasticity
McGraw-Hill Book Company, Inc., Second Edition
- 8 Boley and Weiner:
Theory of Thermal Stresses
John Wiley and Sons, Inc., New York 1960
- 9 Szabó, I.:
Höhere Technische Mechanik
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1960
- 10 Michell, J. H.:
On the Direct Determination of Stress in an Elastic Solid, with Appl. to the
Theory of Plates.
Proc. London Math. Soc., Vol. 31 (1899)
- 11 Cesàro, E.:
Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni
elastiche,
Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat., Società Reale di Napoli, July, August 1906