

FESTIGKEITSANALYSE ZUR BEMESSUNG VON STUTZEN IN REAKTORDRUCKGEFÄSSEN

V. ENGELKE, Y. ERNST, W. POLESNIK,

AEG-Telefunken, Fachbereich Kernreaktoren, Frankfurt a.M., Germany

ABSTRACT

A free body method to establish the dimensions of nozzles in reactor pressure vessels is being described.

The shape of the nozzle is approximated by short, thick walled cylinders, the connecting part between the nozzle and the vessel by a ring and the shell of the vessel by a plate. The two-dimensional stress distribution in the cylinder shell is replaced by a Fourier series. The load comprises of the pressure, an axial force on the nozzle and strain caused by temperature distribution. The results compare well with those of the finite element method and measurements.

Einführung

Zu den kritischen Bereichen eines Reaktordruckgefäßes gehören die Stutzen. Nur die konventionelle Auslegung nach der Flächensatzmethode z.B. nach den AD-Merkblättern oder nach dem ASME-Code genügt nicht den hohen Sicherheitsanforderungen. Man erhält damit auch keinen Überblick über die Spannungsverteilung, und die Wärmespannungen werden überhaupt nicht berücksichtigt. Das Verfahren der finiten Elemente erfordert einen hohen Aufwand, besonders bei Stutzen im Zylinderteil. Die vielen Eingabedaten sind außerdem schwer zu kontrollieren und führen daher leicht zu Fehlern. Es wurde deshalb ein Berechnungsverfahren nach der Stufenkörpertheorie entwickelt. Die Stutzenkontur wird durch kurze dickwandige Zylinder angenähert, der Übergang vom Stutzen zum Druckgefäß durch einen Stülpring und die Druckgefäßschale durch eine Platte/Scheibe. Die Vernachlässigung der Schalenkrümmung hat sich wegen des geringen Durchmesserverhältnisses vom Stutzen und dem Druckgefäß als zulässig erwiesen. Der zweiachsige Spannungszustand in der Zylinderschale wird durch eine Fourierreihe berücksichtigt.

Als Belastung wird der Gefäßinnendruck, eine Axialkraft auf den Stutzen und ein Temperaturfeld angenommen.

1. Aufteilung in Teilschalen

Bild 1 zeigt einen typischen Druckgefäßstutzen. Auf der rechten Seite ist eine mögliche Aufteilung in Stufenkörper dargestellt, für die in Bild 2 alle Schnittlasten eingetragen sind:

- ① Druckgefäß
- ② Stutzen
- ③ Rohrleitung
- ④ Langer Zylinder
- ⑤ Kurzer Zylinder
- ⑥ Stülpring
- ⑦ Kreisringplatte

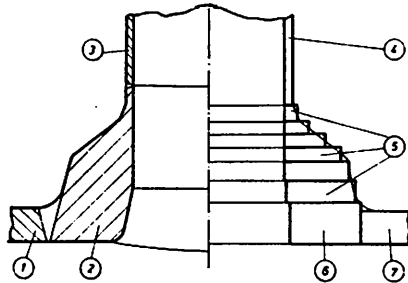


BILD 1

Für jeden Teilschalentyp werden die Verformungs- und Spannungsgleichungen in einem gesonderten Abschnitt zusammengestellt. Die dabei auftretenden Koeffizienten und Abkürzungen werden zur besseren Übersicht im Anhang zusammengefaßt. Die rechnerische Verknüpfung der Teilschalen geschieht mit der Bedingung, daß die Verformungen jeweils an den beiden Schnittufern desselben Schnittes gleich sein sollen.

2. Anschlußrohr

Das Stutzen-Anschlußrohr wird als einseitig lange dünnwandige Zylinderschale betrachtet, deren elastisches Verhalten durch die bekannte Differentialgleichung nach Geckeler beschrieben wird

$$\frac{d^4 W}{dz^4} + 4 \cdot \lambda^4 \cdot W = 0 \quad (2.1)$$

Siehe etwa Girkmann /1/. Das Integral für die radiale Verschiebung lautet

$$W(z) = e^{\lambda \cdot z} \cdot (C_1 \cdot \cos \lambda \cdot z + C_2 \cdot \sin \lambda \cdot z) + e^{-\lambda \cdot z} \cdot (C_3 \cdot \cos \lambda \cdot z + C_4 \cdot \sin \lambda \cdot z) \quad (2.2)$$

mit der Hilfsgröße

$$\lambda^4 = \frac{3 \cdot (1 - \nu^2)}{R^2 \cdot H^2} \quad (2.3)$$

Die statisch unbestimmten Belastungen sind nach Bild 2 an der Übergangsstelle zum ersten kurzen Zylinder die Querkraft Q_0 und das Moment M_0 . Als äußere Belastung werden eine Axialkraft auf das Rohr, ein Moment aus der Versetzung der Zylindermittelflächen am Übergang zum ersten kurzen Zylinder, der Innendruck, ein radialer und ein axialer Temperaturgradient und ein thermisches

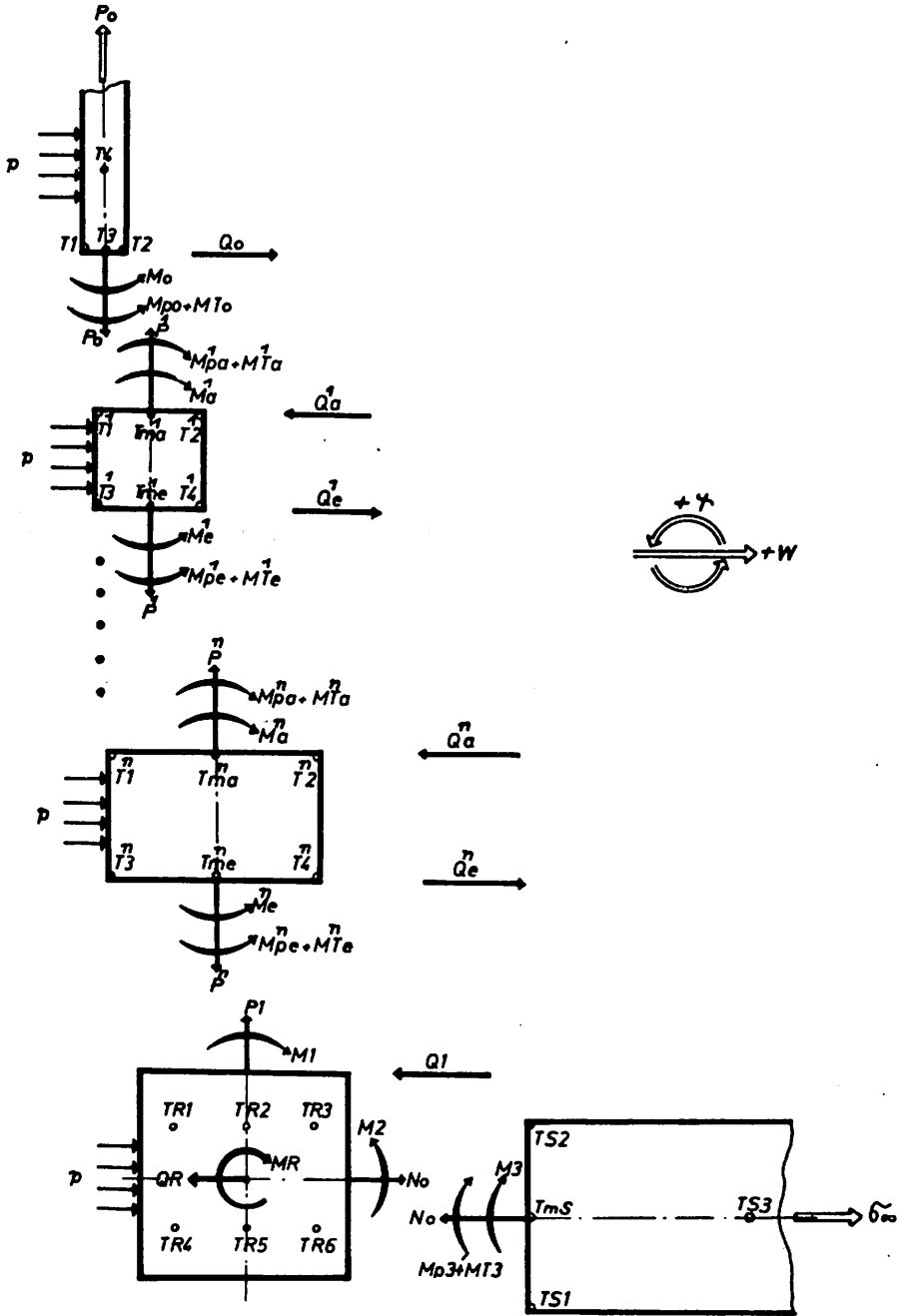


BILD 2
Rechenmodell

Randmoment berücksichtigt. Zusammengefaßt lautet die Beziehung:

$$\begin{bmatrix} W \\ \delta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ M, D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ H, J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B13 \\ B23 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Die Koeffizienten sind im Anhang angegeben.

Die Gesamtaxial- und Tangentialspannungen innen und außen betragen:

$$\begin{aligned} \sigma_{x1,a}(z) &= \frac{p_0 R_0}{H_0} + \frac{\alpha_0 \cdot E_0 \cdot (I_1 - I_2)}{2 \cdot (1 - \nu)} \cdot \left(\frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} - \frac{2 \cdot R_{a,i}^2}{R_a^2 - R_i^2} \right) \pm Q_0 \frac{6 \cdot e^{-\lambda_0 z}}{\lambda_0 \cdot H_0^2} \cdot \sin \lambda_0 \cdot z \\ &\pm H_0 \cdot \frac{6 \cdot e^{-\lambda_0 z}}{H_0^2} \cdot (\cos \lambda_0 \cdot z + \sin \lambda_0 \cdot z) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{t1,a}(z) &= \frac{p_0 R_0}{H_0} + \frac{\alpha_0 \cdot E_0 \cdot (I_1 - I_2)}{2 \cdot (1 - \nu)} \cdot \left(\frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} - \frac{2 \cdot R_{a,i}^2}{R_a^2 - R_i^2} \right) + 2 \cdot Q_0 \cdot \lambda_0 \cdot \frac{R_0}{H_0} \cdot e^{-\lambda_0 \cdot z} \cdot \cos \lambda_0 \cdot z \\ &\pm \nu \cdot \sigma_{x1,a}(z) + 2 \cdot H_0 \cdot \lambda_0^2 \cdot \frac{R_0}{H_0} \cdot e^{-\lambda_0 \cdot z} \cdot (\cos \lambda_0 \cdot z - \sin \lambda_0 \cdot z) \end{aligned}$$

3. Kurzer Zylinder

Die Stutzenform zwischen dem Anschlußrohr und dem Stülpring wird durch kurze dickwandige Zylinder angenähert. Die Dickwandigkeit wird erst bei der Spannungsberechnung berücksichtigt.

Bei der Ermittlung der Verformungen wird wie im vorhergehenden Abschnitt von der Differentialgleichung für einen dünnwandigen Zylinder ausgegangen. Siehe Gleichungen (2.1) bis (2.3), Kantorowitsch /2/ und Esslinger /3/. Wie dort sind die gleichen Belastungen vorausgesetzt, die hier auf zwei Räder wirken. In Matrixschreibweise erhält man für die j-te Teilschale

$$[Z]_e^j = [A]^j \left[[Z]_a^j + [\bar{Z}]_a^j - [\bar{Z}]_e^j \right] \quad (3.1)$$

Dabei ist [A] die Übertragungsmatrix, deren Elemente im Anhang

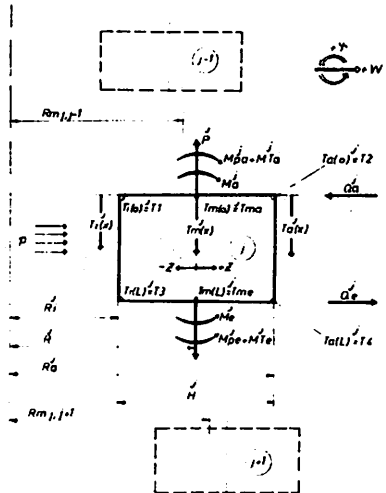


BILD 3
Kurzer Zylinder

zusammengefaßt sind. $[Z]_e$ bzw. $[Z]_a$ sind die Zustandsvektoren der statisch bestimmten Schnittgrößen und $[\bar{z}]_e$ bzw. $[\bar{z}]_a$ die Belastungsvektoren, deren Komponenten im Anhang angegeben sind, jeweils für das Schalenende bzw. den Schalenanfang. Die Komponenten sind allgemein $[Z]^I = (W, \varphi, Q, M)$ (3.2) die radiale Verschiebung, die Verdrehung, die Querkraft und das Meridialmoment. Beim Übergang zum Nachbarzylinder sind wegen des Radiensprunges die Kräfte und Momente im Verhältnis der Radien umzurechnen.

Die Membranspannungen ergeben sich zu

$$\sigma_x = \frac{p}{H} \quad \sigma_t(z) = p \cdot \frac{1+\delta^2}{y^2-1} \quad \sigma_r(z) = p \cdot \frac{1-y^2}{y^2-1} \quad (3.3)$$

und die direkten Wärmespannungen zu

$$\begin{aligned} \sigma_x^I(x,z) &= \frac{E \cdot \alpha}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{II(x) - Ia(x)}{\ln y} \cdot \left(1 - 2 \cdot \ln \delta - \frac{2 \cdot y^2 \cdot \ln y}{y^2-1}\right) \\ \sigma_t^I(x,z) &= \frac{E \cdot \alpha}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{II(x) - Ia(x)}{\ln y} \cdot \left(1 - \ln \delta - \frac{1+\delta^2}{y^2-1} \cdot y^2 \cdot \ln y\right) \\ \sigma_r^I(x,z) &= \frac{E \cdot \alpha}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{II(x) - Ia(x)}{\ln y} \cdot \left(-\ln \delta - \frac{1+\delta^2}{y^2-1} \cdot y^2 \cdot \ln y\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit den Abkürzungen

$$\delta = \frac{Ri}{R+z} \quad \delta' = \frac{Ra}{R+z} \quad y = \frac{Ra}{Ri} \quad (3.5)$$

Für die Ermittlung der Spannungen infolge Randstörungen wird die Theorie von Lee /4/ übernommen.

$$\begin{aligned} \sigma_r^{\sim}(x,z) &= \beta(x) \cdot D1 + R^2 \cdot \beta''(x) \cdot D2 & \sigma_x^{\sim}(x,z) &= \beta(x) \cdot D5 + R^2 \cdot \beta''(x) \cdot D6 \\ \sigma_t^{\sim}(x,z) &= \beta(x) \cdot D3 + R^2 \cdot \beta''(x) \cdot D4 & \sigma_{r,x}^{\sim}(x,z) &= R \cdot \beta'(x) \cdot D7 + R^3 \cdot \beta'''(x) \cdot D8 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Konstanten D1 ... D8 sind im Anhang angegeben.

Außerdem ist

$$\beta(x) = e^{-\lambda \cdot x} \cdot (C1 \cdot \cos \lambda \cdot x + C2 \cdot \sin \lambda \cdot x) + e^{\lambda \cdot x} \cdot (C3 \cdot \cos \lambda \cdot x + C4 \cdot \sin \lambda \cdot x) \quad (3.7)$$

Die Summe der Querkräfte bzw. der Momente ergibt sich daraus zu

$$Q = R^2 \cdot \beta'(x) \cdot A1 + R^4 \cdot \beta'''(x) \cdot A2 \quad M = R^2 \cdot \beta(x) \cdot A1 + R^4 \cdot \beta''(x) \cdot A3 \quad (3.8)$$

Die Konstanten A sind im Anhang angegeben. Für die Integrationskonstanten C erhält man mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} x=0 : \quad Q &= -Q_a \quad \text{und} \quad M = M_a + M_p a + M_I a \\ x=L : \quad Q &= -Q_e \quad \text{und} \quad M = M_e + M_p e + M_I e \end{aligned} \quad (3.9)$$

die Bestimmungsgleichung

$$[B] \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_a \\ M_a + M_p a + M_I a \\ -Q_e \\ M_e + M_p e + M_I e \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Die Koeffizienten der Matrix B sind im Anhang gegeben.

4. Stülpring

Bei der Ableitung der Verformungsgleichungen für den ringförmigen Stufenkörper wird von folgenden

Annahmen ausgegangen :

- Das Stülpmoment greift gleichmäßig verteilt am Umfang an .
- Die sich einstellenden Stülpswinkel sind klein.
- Ebene Schnitte bleiben eben.

Dazu siehe auch Zudans u. a. /5/, Biezeno/Grammel /6/, Markus /7/.

Bild 4 zeigt den Ring mit den abmessungen und Belastungen.

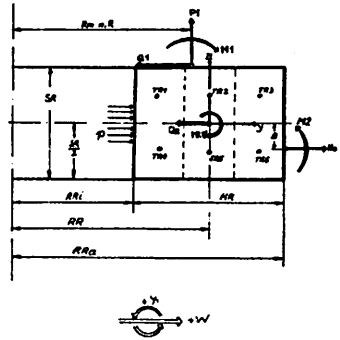


BILD 4
Stülpring

Die Verformungsgleichungen sind :

$$WR1 = - \frac{RR^2}{ER \cdot RR \cdot SR} \cdot QR + WpR1 + WTR1 - \frac{SR}{2} \cdot \gamma_R$$

$$WR2 = - \frac{RR^2}{ER \cdot RR \cdot SR} \cdot QR + WpR2 + WTR2 + B \cdot \gamma_R$$

(4.1)

$$\gamma_R = - \frac{RR^2}{ER \cdot Uy} \cdot MR + \gamma_{RT}$$

mit den statisch bestimmten Verformungen

$$WpR1 = \frac{p \cdot RR1^2}{ER \cdot (RR^2 - RR1^2)} \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot Rn \cdot n, R + (1 + \nu) \cdot \frac{Rn \cdot n, R}{RR}$$

$$WpR2 = \frac{p \cdot RR1^2}{ER \cdot (RR^2 - RR1^2)} \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot RRa + (1 + \nu) \cdot \frac{RRa}{RR}$$

(4.2)

$$WTR1 = \alpha R \cdot Rn \cdot n, R \cdot (I_{eR} - I_{bez})$$

$$WTR2 = \alpha R \cdot RRa \cdot (I_{eR} - I_{bez})$$

$$\gamma_{RT} = 0,5 \cdot \frac{\alpha R \cdot RR}{SR} \cdot \left[\sum_{i=1}^6 TR(i) - \sum_{i=1}^3 TR(i) \right]$$

und den auf den Stülpmittelpunkt reduzierten Lasten QR und MR

$$QR = Q1 \cdot \frac{Rn}{RR} - N0 \cdot \frac{RS}{RR}$$

$$MR = M1 \cdot \frac{Rn}{RR} - M2 \cdot \frac{RS}{RR} - Q1 \cdot \frac{SR}{2} \cdot \frac{Rn}{RR} - N0 \cdot B \cdot \frac{RS}{RR} + P1 \cdot (RR - Rn \cdot n, R) \cdot \frac{Rn \cdot n, R}{RR}$$

(4.3)

$$P1 = Pn \cdot \frac{Rn}{Rn \cdot n, R}$$

$$M1 = Mn \cdot \frac{Rn}{Rn \cdot n, R}$$

Der Stülpradius RR und der Stülpwiderstand Uy sind nach /6/

$$\int \frac{y}{RR + y} \cdot dT = 0$$

$$y = R - RR$$

(4.4)

$$RR = \frac{\int dT}{\int \frac{1}{R} dT}$$

$$Uy = \int \frac{y^2}{RR + y} \cdot dT$$

für eine Rechteckflöche wird :

$$RR = \frac{HR}{\ln \frac{RRa}{RRi}} \quad U_y = \frac{HR^3}{12} \cdot \ln \frac{RRa}{RRi} \quad (4.5)$$

Für den Ring sind nur die Tangentialspannungen von Bedeutung. Die Gesamtspannung ergibt sich in Umfangsrichtung aus der Überlagerung der Spannungen infolge MR, QR Innendruck und des ungleichförmigen Temperaturfeldes. Sie können für jeden Punkt des Stülpringes bestimmt werden, wobei die veränderlichen Koordinaten der Radius R und die Höhe z sind.

Priäre Membranspannungen :

$$\tilde{\sigma}_{t,r}(R) = p \cdot \frac{\left(\frac{RRa}{R}\right)^2}{\left(\frac{RRi}{RRa}\right)^2 - 1} \quad (4.6)$$

direkte Wärmespannungen :

$$\tilde{\sigma}_{t,I}(R,z) = ER \cdot \alpha R \cdot (T_{aR} - T(R,z)) \quad \tilde{\sigma}_{t,I}(R,z) = ER \cdot \gamma R \cdot \frac{z}{R} \quad (4.7)$$

Sekundärspannungen :

$$\tilde{\sigma}_{t,MR}(R,z) = \frac{MR \cdot RR}{U_y} \cdot \frac{z}{R} \quad \tilde{\sigma}_{t,QR} = \frac{QR \cdot RR}{HR \cdot SR} \quad (4.8)$$

5. Druckgefäß

Bei der Berechnung von Stutzen in Zylinder- oder Kugelschalen ist es weitgehend üblich, die Krümmung der Schale zu vernachlässigen, da hierdurch ein vertretbarer Berechnungsaufwand, ja eine übersichtliche, geschlossene mathematische Lösung überhaupt erst erzielt werden kann. Die Zylinder- oder Kugelschale wird dabei im Formelmechanismus durch eine Platte/Scheibe mit kreisrundem Loch ersetzt, wobei die in den Schalen herrschende Membranbeanspruchung durch Randbelastungen erzeugt wird. Es ist einleuchtend, daß diese Näherung umsomehr der Wirklichkeit entspricht,

als der Lochdurchmesser klein ist gegenüber dem des Druckgefäßes. Das Verhältnis ist im allgemeinen kleiner als 0,2. Der zweiachsige Spannungszustand im Zylinder wird durch eine Fourierreihe

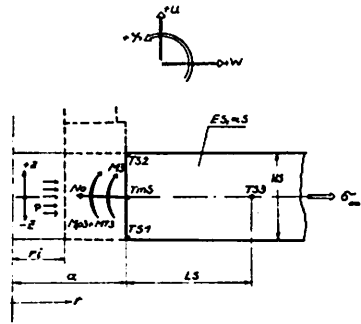


BILD 5
Kreisringplatte

berücksichtigt. Die ermittelten Verformungen für den gesuchten Umfangswinkel werden für den ganzen Stutzenumfang angenommen, um für die übrigen Teilschalen eine Fourierbelastung zu ersparen. Bild 5 zeigt die verwendete Platte/Scheibe mit den Belastungen und Abmessungen.

5.1 Platte

Allgemein lautet die Gleichung für eine Platte

$$\Delta \Delta u = F \quad (5.1)$$

wenn Δ der Laplaceoperator, u die Verschiebung in Richtung der Plattennormalen und F die äußere Belastung ist.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung wird von Timoshenko /8/ übernommen.

$$u = R_0 + R_2 \cdot \cos 2\theta + R_2' \cdot \sin 2\theta \quad (5.2)$$

$$\text{mit: } R_0 = A_0 + B_0 \cdot r^2 + C_0 \cdot \ln r + D_0 \cdot r^2 \cdot \ln r$$

$$R_2 = A_2 \cdot r^2 + B_2 \cdot r^{-2} + C_2 \cdot r^4 + D_2 \quad (5.3)$$

$$R_2' = A_2' \cdot r^2 + B_2' \cdot r^{-2} + C_2' \cdot r^4 + D_2'$$

Die Momente ergeben sich daraus zu

$$\begin{aligned} M_r &= D \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_t &= D \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\text{außerdem ist: } \frac{du}{dr} = \gamma, \quad D = \frac{E \cdot H^2}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (5.5)$$

Für die Integrationskonstanten stehen folgende Randbedingungen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} M_r(r \rightarrow \infty, \theta) &= 0 & \gamma(r \rightarrow \infty, \theta) &= 0 \\ M_t(r \rightarrow \infty, \theta) &= 0 & \gamma(r = a, \theta = 0) &= \gamma_0 \\ M_r(r = a, \theta = 0) &= M_0 & \gamma(r = a, \theta = \frac{\pi}{4}) &= \gamma_2 \\ M_r(r = a, \theta = \frac{\pi}{4}) &= M_2 & \gamma(r = a, \theta = \frac{\pi}{2}) &= \gamma_1 \\ M_r(r = a, \theta = \frac{\pi}{2}) &= M_1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Diese führen zu:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{-a}{2 \cdot (1 - \nu) \cdot D} \left[(M_0 + M_1) \frac{a}{r} + (M_0 - M_1) \frac{a^3}{3 \cdot r^3} \cos 2\theta + (2 \cdot M_2 - M_0 - M_1) \frac{a^3}{3 \cdot r^3} \sin 2\theta \right] \\ M_r &= (M_0 + M_1) \frac{a^2}{2 \cdot r^2} + (M_0 - M_1) \frac{a^4}{2 \cdot r^4} \cos 2\theta + (2 \cdot M_2 - M_0 - M_1) \frac{a^4}{2 \cdot r^4} \sin 2\theta \\ M_t &= -(M_0 + M_1) \frac{a^2}{2 \cdot r^2} - (M_0 - M_1) \frac{a^4}{2 \cdot r^4} \cos 2\theta - (2 \cdot M_2 - M_0 - M_1) \frac{a^4}{2 \cdot r^4} \sin 2\theta \\ \gamma_0 &= -\frac{a \cdot (2 \cdot M_0 + M_1)}{2 \cdot D \cdot (1 - \nu)} ; \quad \gamma_2 = -\frac{2 \cdot a \cdot M_2}{D \cdot (1 - \nu)} ; \quad \gamma_1 = -\frac{a \cdot (2 \cdot M_1 + M_0)}{3 \cdot D \cdot (1 - \nu)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Als äußere Belastung wird ein rotationssymmetrisches Temperaturfeld mit konstanten radialen und axialen Gradienten m_r bzw. m_z berücksichtigt.

$$T(r, z) = \text{IaS} \cdot R(r) \cdot Z(z) \quad ; \quad R(r) = 1 + \frac{nr}{\text{IaS}} (r - a) \quad ; \quad Z(z) = 1 + \frac{nz}{\text{IaS}} \cdot z \quad (5.8)$$

$$\alpha r = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=a, z=0} = \frac{\text{IaS} - \text{IaS}}{\text{LS}} \quad ; \quad \alpha z = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{r=a, z=0} = \frac{\text{IaS} - \text{IaS}}{\text{HS}}$$

und das thermische Randmoment

$$M_r = \frac{\text{ES} \cdot \alpha \cdot \text{S} \cdot \text{HS}^2}{12 \cdot (1 - \nu)} (\text{IaS1} - \text{IaS2}) \quad (5.9)$$

Nach Zudans u.a. /5/ ergibt das Temperaturfeld nach Gleichungen (5.8) das Belastungsglied :

$$F(r) = - (1 + \nu) \cdot \alpha \cdot \text{S} \cdot \frac{12}{\text{HS}^3} \cdot \int_{-0,5 \cdot \text{HS}}^{+0,5 \cdot \text{HS}} T(r, z) \cdot z \cdot dz \quad (5.10)$$

und damit :

$$\begin{aligned} \chi(r) &= - (1 + \nu) \cdot \frac{\alpha \cdot \text{S}}{r} \cdot J_1(r) \\ M_r(r) &= - D \cdot (1 - \nu^2) \cdot \alpha \cdot \text{S} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot J_1(r) \\ M_t(r) &= - D \cdot (1 - \nu^2) \cdot \alpha \cdot \text{S} \cdot [r^2 \cdot J_1(r) - J_2(r)] \end{aligned} \quad (5.11)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} J_1(r) &= \alpha z \cdot \left[\left(1 - \frac{nr}{\text{IaS}} \cdot a\right) \cdot \frac{r^2 - a^2}{2} + \frac{nr}{\text{IaS}} \cdot \frac{r^3 - a^3}{3} \right] \\ J_2(r) &= \alpha z \cdot \left[1 + \frac{nr}{\text{IaS}} \cdot (r - a) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Der Lochrand verdreht sich außerdem um den Betrag :

$$\chi_a = - a \cdot \alpha \cdot \text{S} \cdot \alpha z \quad (5.13)$$

Die G - watspannungen für die Platte sind :

$$\sigma_r(r, \theta) = \frac{6}{\text{HS}^2} \cdot \sum M_r(r, \theta) \quad \sigma_t(r, \theta) = \frac{6}{\text{HS}^2} \cdot \sum M_t(r, \theta) \quad (5.14)$$

5.2 Scheibe

Allgemein lautet die Spannungsfunktion der Scheibe

$$\Delta \Delta \phi = F \quad (5.15)$$

wobei Δ der Laplaceoperator und F die Belastungsfunktion ist. Für die homogene Differentialgleichung wird nach Timoshenko /8/ angesetzt.

$$\phi(r, \theta) = R_0 + R_2 \cdot \cos^2 \theta + R_2' \cdot \sin^2 \theta \quad (5.16)$$

mit den Hilfsfunktionen :

$$\begin{aligned} R_0(r) &= A_0 + B_0 \cdot r^2 + C_0 \cdot \ln r + D_0 \cdot r^2 \cdot \ln r \\ R_2(r) &= A_2 \cdot r^2 + B_2 \cdot r^{-2} + C_2 \cdot r^4 + D_2 \\ R_2'(r) &= A_2' \cdot r^2 + B_2' \cdot r^{-2} + C_2' \cdot r^4 + D_2' \end{aligned} \quad (5.17)$$

Die Spannungen sind allgemein :

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad \tau = - \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (5.18)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten sollen folgende Randbedingungen gelten :

$$\begin{aligned}
 \sigma_r (r \rightarrow \infty, \theta = 0) &= 2 \cdot \sigma_{\infty} & \sigma_r (r \rightarrow \infty, \theta = \frac{\pi}{2}) &= \sigma_{\infty} \\
 \sigma_r (r = a, \theta = 0) &= \sigma_0 & \sigma_r (r = r_1, \theta = 0) &= -p \\
 \sigma_r (r = a, \theta = \frac{\pi}{4}) &= 6\bar{2} & \sigma_r (r = r_1, \theta = \frac{\pi}{4}) &= -p \\
 \sigma_r (r = a, \theta = \frac{\pi}{2}) &= \sigma_1 & \sigma_r (r = r_1, \theta = \frac{\pi}{2}) &= -p
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\tau (r \rightarrow \infty, \theta) = \tau (r = r_1, \theta) = 0 \quad \text{für alle } \theta$$

Daraus folgt für die Spannungen :

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(r, \theta) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[(\sigma_0 + \sigma_1) - (\sigma_0 - \sigma_1) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2 \right] \cdot \cos 2\theta - (2 \cdot 6\bar{2} - \sigma_0 - \sigma_1) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot \sin 2\theta \\
 &\quad + \frac{3}{2} \cdot \sigma_{\infty} \cdot \left(1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right) + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\infty} \left[1 + 3 \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \right] \cdot \cos 2\theta - p \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \\
 \sigma_t(r, \theta) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[(\sigma_0 + \sigma_1) - (\sigma_0 - \sigma_1) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2 \right] \cdot \cos 2\theta - (2 \cdot 6\bar{2} - \sigma_0 - \sigma_1) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot \sin 2\theta \\
 &\quad + \frac{3}{2} \cdot \sigma_{\infty} \cdot \left(1 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right) - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\infty} \left[1 + 3 \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^4 \right] \cdot \cos 2\theta + p \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^2
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

und die radiale Verschiebung :

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) &= -\frac{(1+\nu) \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot S \cdot r} \cdot \left[(\sigma_0 + \sigma_1) - (\sigma_0 - \sigma_1) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{2 \cdot \nu}{1+\nu} \right] \cdot \cos 2\theta - (2 \cdot 6\bar{2} - \sigma_0 - \sigma_1) \cdot \\
 &\quad \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot \sin 2\theta + \frac{3 \cdot r \cdot \sigma_{\infty}}{2 \cdot E \cdot S} \cdot \left[(1-\nu) + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 (1+\nu) \right] \\
 &\quad - \frac{r \cdot \sigma_{\infty}}{2 \cdot E \cdot S} \cdot \left[(1+\nu) \cdot \left(1 + 3 \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^4\right) - 4 \cdot \nu \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \right] \cdot \cos 2\theta + p \cdot (1+\nu) \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^2
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Als thermische Belastung für die Scheibe wird das Temperaturfeld der Gleichungen (5.8) angenommen.

Die Differentialgleichung (5.15) reduziert sich auf die Form:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot u)}{\partial r} \right] = (1+\nu) \cdot \alpha \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \tag{5.22}$$

Zudans u. a. /5/ geben dafür die Lösung an.

$$u(r) = (1+\nu) \cdot \frac{\alpha \cdot S}{r} \cdot \mathcal{B}(r) \tag{5.23}$$

und die Spannungen:

$$\sigma_r(r) = -\frac{E \cdot S \cdot \alpha \cdot S}{r^2} \cdot \mathcal{B}(r) \tag{5.24}$$

$$\sigma_t(r) = E \cdot S \cdot \alpha \cdot S \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \mathcal{B}(r) - 1 \right)$$

mit der Abkürzung :

$$\mathcal{B}(r) = \int_a^r T \cdot r \cdot dr = 2(z) \left[\frac{1}{2} (\tan S - \arctan a) \cdot (r^2 - a^2) + \frac{\arctan r}{3} (r^3 - a^3) \right] \tag{5.25}$$

Außerdem ist noch die thermische Verschiebung, am Rand $r=a$, für die Zusammensetzung mit dem Stülpring erforderlich.

$$w = a \cdot \alpha \cdot S \cdot (\tan S - 1) \tag{5.26}$$

$\circ \sigma_y$
 $\times \sigma_x$ } Meßwerte nach / /

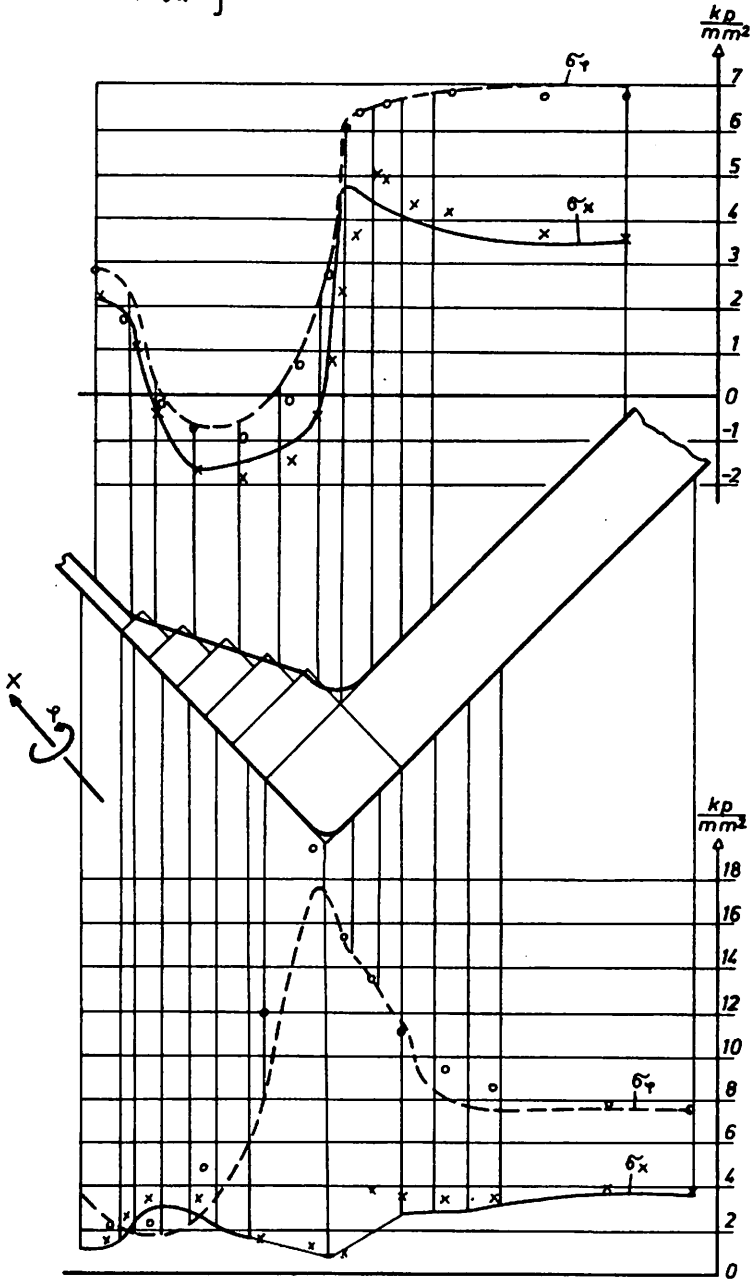


BILD 6

Vergleich mit Meßwerten
nach Literatur /10/

$\circ \hat{\sigma}_r$
 $\times \hat{\sigma}_x$ } Finite Elemente |||

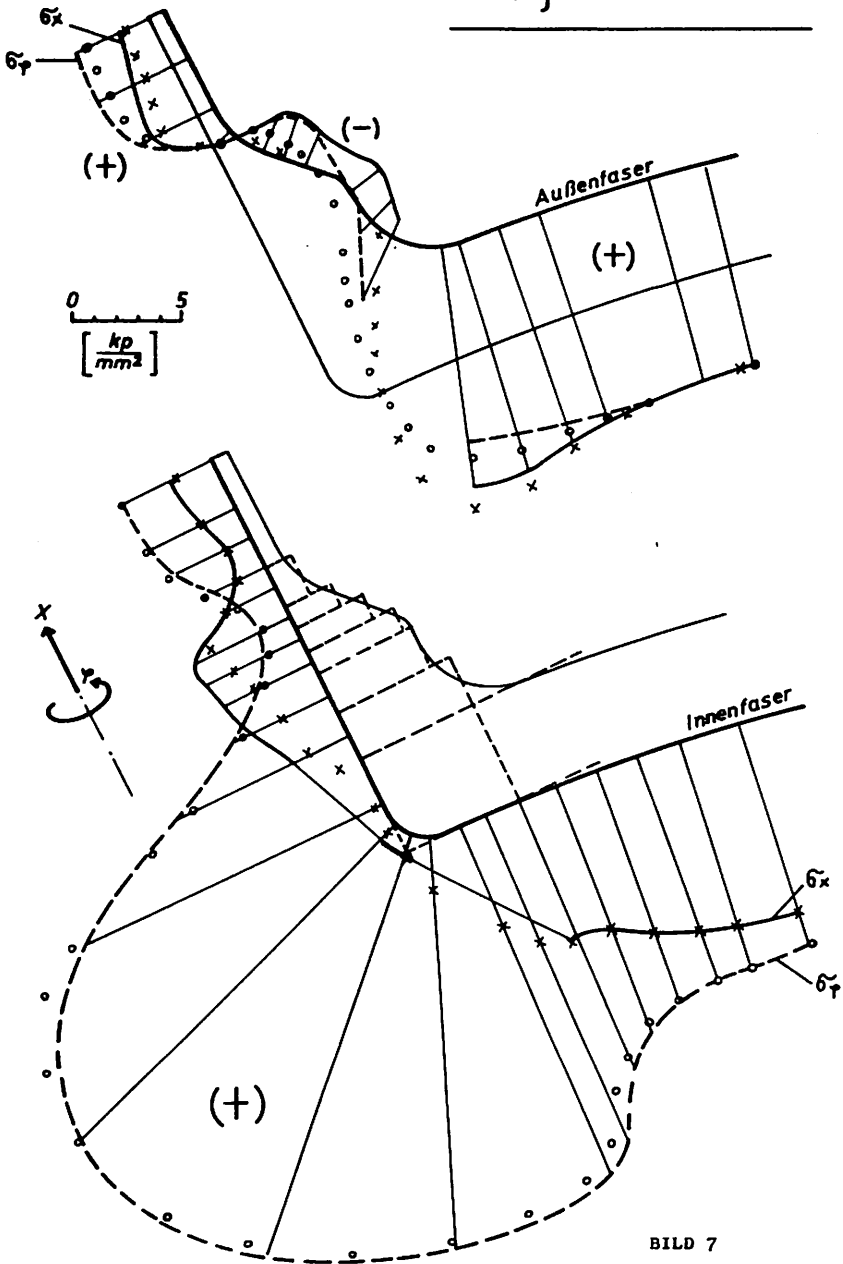


BILD 7

Vergleich mit der Methode der
finiten Elemente nach Literatur /11/

6. Beispiele

Zur Zeit der Fertigstellung dieses Reports lagen den Verfassern für Vergleichsberechnungen nur Rechenwerte nach der Methode der finiten Elemente und Meßergebnisse für Stützen in Reaktordruckgefäßen unter Innendruckbeanspruchung vor. Die Belastung durch Temperaturfelder konnte lediglich für einzelne Stützenteile quantitativ kontrolliert werden. Für die gesamte Struktur war deshalb nur eine qualitative Überprüfung durch Annahme extremer Geometrien oder extremer Temperaturfelder oder extremer Werkstoffdaten möglich. Dabei zeigten sich keine Widersprüche.

Bild 6 zeigt die Spannungsverteilung an den Oberflächen im Längsschnitt der Zylinderschale eines Modells des Dodewaardreaktors. Zum Vergleich sind die Meßwerte als "o" und "x" eingetragen.

Bild 7 stellt die entsprechende Verteilung an einem großen Stützen in einer Kugelschale dar. Zum Vergleich sind die Rechenwerte nach der finiten Element-Methode als "o" und "x" eingetragen.

7. Literatur

- 1 GIRKMANN, K. : "Flächentragwerke", Springer-Verlag 1953
- 2 KANTOROWITSCH, S. B. : "Die Festigkeit der Apparate und Maschinen für die chemische Industrie", VEB Verlag Technik, Berlin, 1955
- 3 ESSLINGER, M. : "Statische Berechnung von Kesselböden", Springer Verlag, 1952
- 4 LEE, C. W. : "Analysis of Thick-Walled Cylinders Under Axisymmetric Loads", Proc. First International Conference on Pressure Vessel Technology 1969
- 5 ZUDANS, Z. u. a. : "Thermal Stress Techniques in the Nuclear Industry", American Elsevier Publ. Co., Inc., New York, 1965
- 6 BIEZENO/GRAMMEL : "Technische Dynamik", Bd 1, Springer Verlag Berlin, 1953
- 7 MARKUS : "Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Baukörper" Werner Verlag, Düsseldorf, 1967
- 8 TIMOSHENKO, S. B., WOINOWSKY+KRIEGER, S. : "Theory of Plates and Scells", 2nd ed., Mc. Graw-Hill Book Co, Inc., New York, 1959
- 9 TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. : "Theory of Elasticity", 2nd ed., Mc. Graw-Hill Book Co., Inc., New York, 1951
- 10 LATZKO, D. G. H. : unveröffentlichte Meßwerte vom Stützen eines Modells des Dodewaardreaktor-Druckgefäß
- 11 THE JAPAN STEEL WORKS, LTD. : "Stress Analysis of Selected Portions of Reactor Pressure Vessel", JSW Technical Report RC 15-69

ANHANG

A.1 Langer Zylinder

Verformungsbeiwerte

$$\begin{aligned} 1/B11 &= 2 \cdot K_0 \cdot \lambda_0^3 & 1/B12 &= 2 \cdot K_0 \cdot \lambda_0^2 \\ 1/B21 &= 1/B12 & 1/B22 &= K_0 \cdot \lambda_0 \end{aligned} \quad (a1)$$

Belastungsglieder

$$\begin{aligned} B13 &= \frac{p \cdot R_0}{E_0 \cdot R_0} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) + R_0 \cdot \alpha_0 \cdot (T3 - Tbez) + B12 \cdot (Mpo + MTo) \\ B23 &= R_0 \cdot \alpha_0 \cdot \frac{T3 - T4}{L_0} + B22 \cdot (Mpo + MTo) \end{aligned} \quad (a2)$$

Versetzungsmoment

$$Mpo = Po \cdot (Ro - Ra_0,1) \quad (a3)$$

Thermisches Moment

$$MTo = \frac{E_0 \cdot \alpha_0}{1 - \nu} \cdot \frac{Ho^2}{12} \cdot (T1 - T2) \quad (a4)$$

Abkürzungen

$$K_0 = \frac{E_0 \cdot Ho^2}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad \lambda_0^2 = \frac{3 \cdot (1 - \nu^2)}{Ro \cdot Ho} \quad (a5)$$

A.2 Kurzer Zylinder

Übertragungsmatrix

$$\begin{aligned} A11 &= \frac{a1 \cdot a2 + a3 \cdot a6}{N} & A31 &= \frac{a6}{N} \cdot \frac{E \cdot H}{2 \cdot \lambda \cdot R} \\ A12 &= -\frac{a1 \cdot a4 + a2 \cdot a3}{N} \cdot \frac{R}{\lambda} & A32 &= \frac{-a2}{N} \cdot \frac{E \cdot H}{2 \cdot \lambda^2} \\ A13 &= (a3 \cdot A11 - a1 \cdot A12 \cdot \frac{\lambda}{R} + a4) \cdot \frac{2 \cdot R \cdot \lambda}{E \cdot H} & A33 &= \frac{a1 \cdot a2 + a3 \cdot a6}{N} \\ A14 &= (a1 \cdot A22 - a3 \cdot A21 \cdot \frac{R}{\lambda} + a2) \cdot \frac{2 \cdot \lambda^2}{E \cdot H} & A34 &= \frac{a2 \cdot a5 - a1 \cdot a6}{N} \cdot \frac{\lambda}{R} \\ A21 &= \frac{a1 \cdot a6 - a2 \cdot a5}{N} \cdot \frac{\lambda}{R} & A41 &= \frac{a2}{N} \cdot \frac{E \cdot H}{2 \cdot \lambda^2} \\ A22 &= \frac{a1 \cdot a2 - a4 \cdot a5}{N} & A42 &= \frac{a4}{N} \cdot \frac{E \cdot H \cdot R}{2 \cdot \lambda^3} \\ A23 &= (a1 \cdot A11 + a5 \cdot A12 \cdot \frac{\lambda}{R} - a2) \cdot \frac{2 \cdot \lambda^2}{E \cdot H} & A43 &= \frac{a1 \cdot a4 + a2 \cdot a3}{N} \cdot \frac{R}{\lambda} \\ A24 &= (-a5 \cdot A22 - a1 \cdot A21 \cdot \frac{R}{\lambda} - a6) \cdot \frac{2 \cdot \lambda^3}{E \cdot H \cdot R} & A44 &= \frac{a4 \cdot a5 - a1 \cdot a2}{N} \end{aligned} \quad (a6)$$

mit den Abkürzungen :

$$\begin{aligned} N &= a2^2 - a4 \cdot a6 & a0 &= \sinh^2 \theta - \sin^2 \theta \\ B &= \frac{\lambda \cdot L}{R} & \lambda^4 &= 3 \cdot (1 - \nu^2) \cdot (R/H)^2 \end{aligned} \quad (a7)$$

$$a1.a0 = \sinh^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$a4.a0 = \cosh \theta \cdot \sin \theta - \sinh \theta \cdot \cos \theta$$

$$a2.a0 = -2 \cdot \sinh \theta \cdot \sin \theta$$

$$a5.a0 = -2 \cdot (\sinh \theta \cdot \cosh \theta + \sin \theta \cdot \cos \theta)$$

$$a3.a0 = \sinh \theta \cdot \cosh \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$a6.a0 = 2 \cdot (\sinh \theta \cdot \cos \theta + \cosh \theta \cdot \sin \theta)$$

(a7)

Belastungsvektoren

Anfang :

$$W_a = \frac{P \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot R_1^2}{E \cdot (R_a^2 - R_1^2)} \cdot R_{a \ j, j-1} + (1 - \nu) \cdot \frac{R_a^2}{R_{a \ j, j-1}} + R_{a \ j, j-1} \cdot \infty \cdot (I_{a0} - I_{bez})$$

$$M_a = R_{a \ j, j-1} \cdot \frac{\infty}{l} \cdot (I_{a0} - I_{a0})$$

(a8)

$$M_a = P \cdot (R - R_{a \ j, j-1}) + \frac{E \cdot \infty}{1 - \nu} \cdot \frac{H^2}{12} \cdot (I1 - I2)$$

Ende :

$$W_e = \frac{P \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot R_1^2}{E \cdot (R_a^2 - R_1^2)} \cdot R_{a \ j, j+1} + (1 + \nu) \cdot \frac{R_a^2}{R_{a \ j, j+1}} + R_{a \ j, j+1} \cdot \infty \cdot (I_{a0} - I_{bez})$$

$$M_e = R_{a \ j, j+1} \cdot \frac{\infty}{l} \cdot (I_{a0} - I_{a0})$$

(a9)

$$M_e = P \cdot (R - R_{a \ j, j+1}) + \frac{E \cdot \infty}{1 - \nu} \cdot \frac{H^2}{12} \cdot (I3 - I4)$$

Konstanten der Gleichungen (3,10)

$$D1 = -0,5 \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (q^2 - f^2)$$

$$D2 = -0,5 \cdot \frac{\nu}{1-\nu^2} \cdot (q^2 - f^2) + 0,5 \cdot \frac{\nu}{1-\nu^2} \cdot (q^3 - f^2)$$

$$D3 = 1 - \frac{1}{1-\nu} \cdot q + 0,5 \cdot \left(\frac{2+\nu}{1-\nu} \cdot f^2 - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot f^2 \right)$$

$$D4 = -\frac{\nu}{1-\nu^2} \cdot q + 0,5 \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (q^2 - f^2) - 0,5 \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4+\nu}{1+\nu} \cdot q^3 \right) - \frac{2+\nu}{1+\nu} \cdot f^2$$

$$D5 = -\frac{\nu}{1-\nu} \cdot q + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot q^2$$

(a10)

$$D6 = -\frac{1}{1-\nu^2} + 0,5 \cdot \frac{\nu}{1-\nu^2} \cdot q^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot q^3 - f \cdot q^2 \right)$$

$$D7 = 0,5 \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (q^2 - f^2) - 0,5 \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (q^3 - q \cdot f^2)$$

$$D8 = 0,5 \cdot \frac{1}{1-\nu^2} \cdot (q^2 - f^2) - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\nu} \cdot (q^3 - q \cdot f^2) + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4-\nu^2}{1-\nu^2} \cdot f^4 - \frac{4-2\nu-3\nu^2}{1-\nu^2} \cdot q^2 \cdot f^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4-\nu-5\nu}{1-\nu^2} \cdot f^2 \right)$$

Abkürzungen :

$$q = \frac{Z}{R}$$

$$f = \frac{H}{2 \cdot R}$$

(a11)

Konstanten der Gleichungen (3.10)

$$A1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{v}{1-v} \cdot f^3$$

$$A2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{v}{1-v^2} \cdot f^3 - \frac{2 \cdot (4 + 3 \cdot v) \cdot (1 - 2 \cdot v)}{45 \cdot (1 - v^2)} \cdot f^5 \quad (a12)$$

$$A3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-v^2} \cdot f^3 + \frac{4 \cdot v}{15 \cdot (1 - v)} \cdot f^5$$

Matrizelemente der Gleichungen (3.10)

$$B11 = R^2 \cdot \lambda \cdot (R^2 \cdot A2 \cdot 2 \cdot \lambda^2 - A1)$$

$$B31 = R^2 \cdot \lambda \cdot k3 \cdot (-A1 \cdot k1 + R^2 \cdot A2 \cdot 2 \cdot \lambda^2 \cdot k2)$$

$$B12 = R^2 \cdot \lambda \cdot (R^2 \cdot A2 \cdot 2 \cdot \lambda^2 + A1)$$

$$B32 = R^2 \cdot \lambda \cdot k3 \cdot (A1 \cdot k2 + R^2 \cdot A2 \cdot 2 \cdot \lambda^2 \cdot k1)$$

$$B13 = -B11$$

$$B33 = R^2 \cdot \lambda \cdot k4 \cdot (A1 \cdot k2 - R^2 \cdot A2 \cdot 2 \cdot \lambda^2 \cdot k1)$$

$$B14 = B12$$

$$B34 = R^2 \cdot \lambda \cdot k4 \cdot (A1 \cdot k1 + R^2 \cdot A2 \cdot 2 \cdot \lambda^2 \cdot k2)$$

$$B21 = R^2 \cdot A1$$

$$B41 = R^2 \cdot k3 \cdot (A1 \cdot c1 + R^2 \cdot A3 \cdot 2 \cdot \lambda^2 \cdot c2) \quad (a13)$$

$$B22 = -R^4 \cdot A3 \cdot 2 \cdot \lambda^2$$

$$B42 = R^2 \cdot k3 \cdot (A1 \cdot c2 - R^2 \cdot A3 \cdot 2 \cdot \lambda^2 \cdot c1)$$

$$B23 = B21$$

$$B43 = R^2 \cdot k4 \cdot (A1 \cdot c1 - R^2 \cdot A3 \cdot 2 \cdot \lambda^2 \cdot c2)$$

$$B24 = -B22$$

$$B44 = R^2 \cdot k4 \cdot (A1 \cdot c2 + R^2 \cdot A3 \cdot 2 \cdot \lambda^2 \cdot c1)$$

mit den Abkürzungen :

$$c1 = \cos \lambda \cdot L$$

$$k1 = c1 + c2$$

$$k3 = e^{-\lambda \cdot L}$$

$$c2 = \sin \lambda \cdot L$$

$$k2 = c1 - c2$$

$$k4 = e^{+\lambda \cdot L}$$

(a14)