A Discrete Memory Type Description of Some Ratchet and Shape-Memory Effects
(Une description à mémoire discrète d'effets de rochet et de mémoire de forme)

J.M. Boisserie

Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches, 6 quai Watier, F-78400 Chatou, France

P. Guelin

Institut de Mécanique, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, B.P. 53, Centre de Tri, F-38041 Grenoble Cedex, France

The aim of the present paper is to propose a discrete memory type approach in order to explain and predict the material response for bodies underlying second-order irreversible processes (ratchet effect) or complicated thermo-mechanical reversible and irreversible processes (superelasticity and shape-memory effects). These open problems are discussed using the theoretical frame-work given in previous papers (S.M.I.R.T.4 L1/9, S.M.I.R.T.5 L1/6, J. de Mécanique, 19, 2, 1980). The basic concepts (particularly the pure hysteresis one) are assumed to be known.

The first part of the paper is devoted to a thermo-mechanical study of superelasticity and shape-memory effects. The basic idea is, by starting from the microscale experimental results, to express the material properties as a sum of two stress contributions σ_{rev} and σ_a of reversible and irreversible types respectively. The analysis is based on the thermo-mechanical description of irrotational triaxial kinematics. The mains results are : 1. superelasticity is immediately interpreted as the sum of the two stress contributions σ_{rev} and σ_a ; 2. the shape-memory effect corresponds to the case where σ_{rev} and σ_a are simply varying with the assigned temperature of the experiment ; 3. the stresses σ_a and σ_{rev} are interpreted as the "effective" and "chemical" stresses of OTSUKA and al, Acta Metallurgica, 24, 1976, p. 207-226 ; 4. an evolution with variable temperature, as studied by MULLER, Arch. Rational Mech. Anal., 67, 1978, p. 61-77, is readily interpretable and, moreover, the description of the first loading does not involve any particular problem ; 5. the theory predicts that damping capacity are remarkably high for small amplitude vibrations.

Rotational kinematics are taken into account in the second part of the paper. The goal is to study a purely mechanical simple case of ratchet effect.

The basic idea can be presented as follows. Pure hysteresis behaviour (a concept which implies no hardening) is able to describe the main features of real behaviours (generally exhibiting hardening on a fraction of the admissible service histories). So, the central concept is that of discrete memory, explicitely introduced in the constitutive equations through the "reference stress" tensor σ_{aR} which is a constant by pieces tensor-valued functional of the specified history. The constitutive tensorial representation must express two relevant features. Firstly, introducing the tensor σ_{aR} (through the intrinsic dissipation and $\sigma_a - \sigma_{aR}$), secondly, expressing the constant by pieces variation of σ_{aR} (by using an objective differentiation of $\sigma_a - \sigma_{aR}$). The main results are : 6. ratchet effect is intrinsic of pure hysteresis behaviour as POYNTING effect is intrinsic of elastic behaviour ; 7. for small imposed shear strain G ($G \ll Go$) the ratchet steps are found to be proportional to G^2 ; 8. for $G \gg Go$ ratchet steps are proportional to G ; 9. the cumulated ratchet is of the order of the imposed cyclic shear strain G if the number of cycles is of the order of 1/4Go ; 10. by an adequate formula, the Go values are found to be of the order of .001 for stainless steel and .002 for aluminium alloys.

In the framework of classical approach, the two problems investigated here remains open despite recent progress. The present study allows the understanding of these difficulties.

1. Introduction. Soit e l'énergie interne spécifique ; $\dot{I}$ la densité volumique de taux d'énergie reçue associée à une création de désordre (cf. /1/ /2/) ; σ la contrainte de Cauchy ; $\mathcal{D}$ la vitesse de déformation ; r_a la densité volumique de taux de chaleur reçue par irréversibilités internes intrinsèques ; ϕ , $\mathcal{P}_e$ et Π la dissipation intrinsèque volumique, la puissance des efforts extérieurs et la puissance reversible recevable à l'inversion (cf /1/2/).
Le schéma est :

$$\rho\dot{e} = r_a + \mathcal{P}_e \; ; \; \dot{I} = r_a + \phi \; ; \; \rho\dot{e} = \dot{I} + \Pi \; ; \; 0 = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_i \; ; \; \mathcal{P}_i = -\mathrm{tr}\,\sigma.\mathcal{D} \tag{1}$$

$$\Pi = \mathrm{tr}\,\sigma_R . \mathcal{D} \tag{2}$$

où σ_R est une fonctionnelle du chargement imposé , constante par morceaux, définie ci-dessous par les éq. (7) et (8). Avec les eq. (1) et (2) :

$$\phi = \mathrm{tr}(\sigma - \sigma_R).\mathcal{D} \quad (= \mathcal{P}_e - \Pi) \tag{3}$$

La définition des arcs et branches (cf. /1/ /2/) d'hystérésis pure peut être spécifiée à l'aide d'une relation entre: un taux de $\sigma - \sigma_R$; $\mathcal{D}$; $\sigma - \sigma_R$ et un paramètre d'homothètie ω, à valeurs 1 ou 2, fonctionnelle du chargement imposé. Notons (cf. /3/) :

$$\dot{S}_1 = (3\alpha_0 + \alpha_1)\, E_1 \; ; \; S_1 = \mathrm{tr}\,\sigma \; ; \; E_1 = \mathrm{tr}\,\mathcal{D} \tag{4}$$

$$D_J\sigma = \alpha_1 \bar{\mathcal{D}} + \alpha_4 \Delta\bar{M}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R) \; ; \; \alpha_4 = -\alpha_1/(\omega\,\bar{Q}_0)^2 \tag{5}$$

relations où D_J note la dérivée de Jaumann et où les 3 paramètres caractéristiques du continu sont α_0 et $\alpha_1/2$ (Lamé) et $\bar{Q}_0$ (rayon du cylindre de Misès). D'après l'éq. (4), la partie isotrope est reversible et (3) permet d'introduire par sa différentielle :

$$dW_L = \Delta\bar{M}\, dt = \mathrm{tr}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R).\mathcal{D}\, dt \tag{6}$$

la fonction d'aide W_L définie, continue, non décroissante par morceaux, de taux égal à $\emptyset$.
Tout affixe mémorable σ_I est défini par :

$$\delta W_L < 0 \qquad (\delta : \text{variation virtuelle}) \tag{7}$$

La suite $\{\sigma_I\}$ de ces affixes est gérée par l'algorithme (cf. /1/ /2/) :

$$\mathcal{A}\,[W_L, \delta W_L] \Rightarrow [\sigma_M, \sigma_R^{K,\alpha}, \omega] \; ; \; \omega = 1 \text{ ou } 2 \tag{8}$$

portant sur W_L, déterminant la suite $\{\sigma_M\} \in \{\sigma_I\}$ des affixes encore mémorisés, et, dans cette suite, l'élément unique $\sigma_R^{K,\alpha}$ figurant en (2) lors du parcours de l'arc α de branche K. Les extrémités d'arcs sont éléments de $\{\sigma_M\}$ et lors de la traversée d'un σ_M il est exclu que $d\phi$ prenne, à droite, une valeur supérieure à la plus petite valeur de $d\phi$ mémorisée à gauche. Les relations (1) à (8) forment un schéma thermomécanique à structure héréditaire, à mémoire discrète, à rétroaction entre sollicitation et réponse, non réductible à un formalisme hamiltonien, ici particularisé grâce aux eq. (4) et (5). Pour ce schéma d'hystérésis pure les définitions du taux r_a, du critère (7) et de l'algorithme (8) sont canoniques en ce sens qu'elles reflètent respectivement le premier principe, le second principe et le principe de minimum de $d\phi$. En d'autres termes l'effet Taylor-Farren-Quinney est intrinsèque et le critère et l'algorithme sont universels en matière de description des évolutions irréversibles associées à des structures dissipatives sous-jacentes. L'extension de l'équation de Gibbs est la troisième des eq. (1) (cf. /2/). Les points de départ pour l'étude d'une extension du critère de Prigogine sont les inégalités associées à la définition (3) de ϕ (cf. /4/).

2. Superélasticité et mémoire de forme. On envisage des cinématiques homogènes triaxiales

irrotationnelles à axes principaux fixes. Les déformées successives sont des parallèlépipèdes rectangles.

2.1. L'étude thermomécanique est formellement analogue à celle du cas unidimensionnel (cf. /5/). Soit, en effet, des sollicitations spécifiées par la donnée de σ, à trace S_1 nulle (hypothèse peu restrictive). Les représentations polaires de σ et $\mathcal{D}$ sont alors :

$$\sigma_1 = \sqrt{2/3}\, Q \cos\varphi \;;\; \sigma_2 = \sqrt{2/3}\, Q \cos(\varphi - 2\pi/3) \;;\; \sigma_3 = \sqrt{2/3}\, Q \cos(\varphi + 2\pi/3) \tag{9}$$

$$\mathcal{D}_1 = \sqrt{2/3}\, q \cos\varphi_d \;;\; \cdots \tag{10}$$

Avec les eq. (9) et (10) la définition de $\Delta\bar{M}$ donne :

$$\Delta\bar{M} = [\, Q \cos(\varphi - \varphi_d) - Q_R \cos(\varphi_R - \varphi_d)]\, q = (\alpha \cos\varphi_d + \beta \sin\varphi_d)\, q \tag{11}$$

$$\alpha = Q\cos\varphi - Q_R \cos\varphi_R \;;\; \beta = Q \sin\varphi - Q_R \sin\varphi_R \tag{12}$$

où α et β sont définis par le trajet dans l'espace σ_i. Avec les eq. (11) et (12) le schéma (5) s'explicite par 3 équations non indépendantes donnant les taux de α et de :

$$B = Q\cos(\varphi - 2\pi/3) - Q_R \cos(\varphi_R - 2\pi/3) \;;\; C = Q\cos(\varphi + 2\pi/3) - Q_R \cos(\varphi_R + 2\pi/3) \tag{13}$$

en fonction de $\alpha_1, Q_0, q, \varphi_d, \beta, \alpha, B, C$. La somme : $\alpha + B + C$ est nulle. Il est possible de calculer $\cos\varphi_d$ et q, donc $\Delta\bar{M}$. Notons R le rapport $(Q - Q_R)/Q_0$ et soit s tel que :

$$s_0\, ds = q \cdot dt = (\mathrm{tr}\,\mathcal{D}^2)^{1/2} \;;\; s_0 = \bar{Q}_0/\alpha_1 \;;\; ds > 0 \text{ si } \mathcal{D} \neq 0 \;;\; ds = 0 \text{ si } \mathcal{D} = 0$$

Le long des chemins à phase constante :

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi_d \;;\; \Delta M = (Q - Q_R)\cdot q \;;\; q = (1/\alpha_1)\, Q_0\, \dot{R}/(1 - R^2) \;; \\ &\rho\dot{e} = \dot{Q}\, s_0 s \;;\; -r_2 = Q(s_0\dot{s}) - \dot{Q}(s_0 s) \;; \\ &\rho\dot{e} = (1/2)\dot{Q}\, s_0(s - s_R) + (1/2)(Q + Q_R)\, s_0\dot{s} \;;\; -r_2 = -(1/2)\dot{Q}\, s_0(s - s_R) + (1/2)(Q - Q_R)\, s_0\dot{s} \end{aligned} \tag{14}$$

Le long des chemins à déviateur constant Q_1 $(Q_1 < \bar{Q}_0)$:

$$\varphi = \varphi_d - \pi/2 \;;\; \Delta\bar{M} = 0 \;;\; q = (1/\alpha_1)\, Q_1\, \dot{\varphi} \;;\; \rho\dot{e} = -r_2 = 0 \tag{15}$$

L'évolution sous déviateur constant est thermomécaniquement neutre. Un chemin quelconque est décomposable en chemins infinitésimaux à φ et Q constant : l'étude est formellement analogue et aussi simple que celle du cas unidimensionnel.

2.2. La superposition de contrainte. A présent la contrainte de Cauchy d'hystérésis pure, définie par le schéma (1) à (8) est noté σ_a. On considère la superposition :

$$\phi = 0 + \phi_a \;;\; r = 0 + r_a \;;\; \sigma = \sigma_{rev} + \sigma_a \tag{16}$$

où σ_{rev} est une contribution réversible associée à un processus microstructural réversible. La thermomécanique est essentiellement celle de σ_a et relève des eq. (14) et (15). Les effets du premier ordre peuvent être étudiés par un schéma unidimensionnel (cf. § 2.1 ci-dessus).

2.3. Superélasticité en l'absence d'écrouissage au sens de /1/ à /4/. On considère (cf. /6/) un schéma unidimensionnel d'élasto-hystérésis pure (cf. Fig. 1a et 1b). L'allure des effets observés (cf. /7/) est indiquée (cf. Fig. 1c, à courbure continue par arcs de branches).

2.4. Thermohystérésis pure, thermoplasticité. Les bases, suggérées en /1/, étudiées en /4/, peuvent être décrites très brièvement ainsi. D'une part, pour $\mathcal{D}(t)$ et une température $T(t)$ spécifiés, la famille d'évolution d'hystérésis pure paramétrée en $T \in [T_1, T_2]$ obtenue par intégration à T constant, donne $d\sigma_a$ en fonction de $d\varepsilon$ et dT. D'autre part, les contri-

butions d'écrouissages sont calculées par intégration de leurs taux respectifs à T actuelle, variable.

Enfin notons que σ_R est en général virtuel (cf. /4/ et /8/).

2.5. Mémoire de forme en l'absence d'écrouissage au sens de /1/ à /4/. On considère (cf. /6/) un schéma unidimensionnel de thermoélastohystérésis pure pour lequel l'importance relative des contributions σ_a et σ_{rev} dépend de T, température imposée constante durant la sollicitation imposée $\mathcal{D}(t)$. Soit $M(T)$ la mesure de la présence de martensite ou autre structure reversible ($0 \leq M \leq 1$) : le graphe $M(T)$ est classique (cf. fig. 2a) et A_f et M_s sont les températures de pleine austénisation et de début de formation de la martensite. L'effet de mémoire de forme s'interprète à l'aide de 2 hypothèses simples : d'une part σ_a (contrainte "effective" de /9/) est du genre $[\alpha_1, Y_0 \simeq 0]$ si $A_f < T$ et du genre $[\alpha_1, Y_0]$ si $T < A_f$; d'autre part σ_{rev} (contrainte "chimique" de /9/) décroît fortement si $T \simeq M_s$, ceci pour les déformations petites de l'ordre du seuil de déformation Y_0/α_1 (cf. fig. 2b). On obtient les graphes 3a à 3e conformes aux résultats expérimentaux (cf. /9/). Le traitement de la première charge et des cyclages complexes est immédiat (ce n'est pas le cas dans /10/) et les capacités d'amortissement des vibrations sont exceptionnelles si : $T < A_f$.

3. Le rochet intrinsèque de l'hystérésis pure (cf. /11/ et /12/ /13/)

3.1. Notations. La configuration de référence de la description lagrangienne est le cube initial unité. On considère la transformation linéaire tangente F d'éléments diagonaux $1 + K_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) ; F_{12}, noté 2.G, est le seul autre élément non nul en général. Les composantes de la vitesse de déformation sont :

$$\mathcal{D}_{ii} = \dot{K}_i (1+K_i)^{-1} \; (i=1,2,3) \; ; \; \mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{21} = (\dot{G} - G\mathcal{D}_{11}).(1+K_2)^{-1} \tag{17}$$

Si J note le déterminant de F on a, pour la première charge :

$$\phi = \mathrm{tr}\, \sigma . \mathcal{D} = (1/J)\, \mathrm{tr}\, T . \dot{F}^T = (1/J)\, \mathrm{tr}\, S . (\dot{C}_2/2) \quad (C_2 = F^T F) \tag{18}$$

où T et S notent les contraintes de Piola-Lagrange et Piola-Kirchhoff. Les composantes non nulles de T sont T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12} et $T_{21} \neq T_{12}$:

$$T_{11} = (1+K_3)[(1+K_2)\sigma_{11} - 2G\sigma_{12}] \; ; \; T_{12} = (1+K_1)(1+K_3)\sigma_{12} \; ; \cdots \tag{19}$$

Les composantes non nulles du complément C de Jaumann sont :

$$-C_{11} = C_{22} = 2\sigma_{12}\mathcal{D}_{12} \; ; \; C_{12} = C_{21} = (\sigma_{11} - \sigma_{22}).\mathcal{D}_{12} \; ; \; C = D_J\sigma - d\sigma/dt \tag{20}$$

3.2. Cas de la sollicitation à trace nulle. Elle est spécifiée par $\sigma_{12}(t)$ et par :

$$\sigma_{11} = -\sigma_0 \; ; \; \sigma_{22} = \sigma_0 \; ; \; \sigma_{33} = 0 \tag{21}$$

Puisque S_1 est imposé nul, E_1 est nul (par l'éq. (4)). Une sollicitation (21) peut être réalisée par l'application d'une répartition homogène de vecteurs contrainte : les résultantes $\vec{F}_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont, par exemple, définies immédiatement à partir de (19) :

$$\vec{F}_3 = 0 \; ; \; \vec{F}_2 = (1+K_1)(1+K_3)\sigma_{12}.\vec{1} + (1+K_1)(1+K_3)\sigma_0 . \vec{2} \; ; \; \vec{F}_1 = \cdots$$

Avec les eq. (18) (20) et (21), les eq. (4) et (5) donnent, lors du premier chargement :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{22} + \mathcal{D}_{33} \\ -2\sigma_{12}(\dot{G} - G\mathcal{D}_{11})(1+K_2)^{-1} &= (\alpha_1/3)(2\mathcal{D}_{11} - \mathcal{D}_{22} - \mathcal{D}_{33}) - \alpha_1 \bar{Q}_0^2 \bar{M}(-\sigma_0) \\ 2\sigma_{12}(\dot{G} - G\mathcal{D}_{11})(1+K_2)^{-1} &= (\alpha_1/3)(-\mathcal{D}_{11} + 2\mathcal{D}_{22} - \mathcal{D}_{33}) - \alpha_1 \bar{Q}_0^2 \bar{M}\, \sigma_0 \end{aligned}\right] \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\sigma}_{12} - 2\sigma_0(\dot{G} - G\mathcal{D}_{11})(1+K_2)^{-1} = \alpha_1(\dot{G} - G\mathcal{D}_{11})(1+K_2)^{-1} - \alpha_1 \bar{Q}_0^2 \bar{M} \sigma_{12} \\ &\bar{M} = \sigma_0(-\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{22}) + 2\sigma_{12}(\dot{G} - G\mathcal{D}_{11})(1+K_2)^{-1} \end{aligned}\right] \quad (22)$$

L'étude du cas de la torsion cyclique infinitésimale présente un intérêt en matière d'applications et une importance exceptionnelle sur le plan théorique si l'on cherche à mettre en évidence les conséquences directes du caractère héréditaire à mémoire discrète du schéma thermomécanique (cf. § 3.3). Si : $K_i \ll 1$ (i = 1, 2, 3) et si : $G \ll 1$, (22) s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \dot{K}_1 + \dot{K}_2 + \dot{K}_3 \\ -2\sigma_{12}\dot{G} &= (2\dot{K}_1 - \dot{K}_2 - \dot{K}_3)(\alpha_1/3) - \alpha_1 \cdot \bar{Q}_0^2 \cdot \bar{M} \cdot (-\sigma_0) \\ 2\sigma_{12}\dot{G} &= (-\dot{K}_1 + 2\dot{K}_2 - \dot{K}_3)(\alpha_1/3) - \alpha_1 \cdot \bar{Q}_0^2 \cdot \bar{M} \cdot \sigma_0 \\ \dot{\sigma}_{12} - 2\sigma_0\dot{G} &= \alpha_1 \dot{G} - \alpha_1 \cdot \bar{Q}_0^2 \cdot \bar{M} \cdot \sigma_{12} \\ \bar{M} &= \sigma_0(-\dot{K}_1 + \dot{K}_2) + 2\sigma_{12} \cdot \dot{G} \end{aligned}\right] \quad (23)$$

Le premier rochet fondamental s'obtient pour σ_0 nul. De part et d'autre de la première inversion :

$$\begin{aligned} &\dot{K}_3 = 0 \; ; \; -\dot{K}_1 = \dot{K}_2 = \dot{K} = (2/\alpha_1)\sigma_{12}\dot{G} \; ; \; \sigma_{12} = (\bar{Q}_0/\sqrt{2})\, th(G/G_0) = f(G) \; ; \; G_0 = \bar{Q}_0/\sqrt{2}\,\alpha_1 \\ &\phi = \bar{M} = 2\sigma_{12}\dot{G} \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\dot{K}_3 = 0 \; ; \; -\dot{K}_1 = \dot{K}_2 = \dot{K} = (2/\alpha_1)(\sigma_{12} - \sigma_{12R})\dot{G} \; ; \; \sigma_{12} - \sigma_{12R} = 2f((G - G_R)/2) \\ &\phi = \Delta\bar{M} = 2(\sigma_{12} - \sigma_{12R}) \cdot \dot{G} \geq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Ainsi, $\dot{K}$ est non négatif (nul dans le voisinage à droite de l'inversion). L'effet Poynting d'hystérésis pure s'accumule : le cube initial se contracte selon l'axe 1 et s'allonge selon l'axe 2, ceci périodiquement sous sollicitation $\sigma_{12}(t)$ périodique. L'intégration des eq. (24) et (25) donne :

$$K = 2G_0^2 \, Log(Ch(G/G_0)) = h(G) \quad ; \quad K - K_R = 4 \cdot h((G - G_R)/2) \quad (26)$$

Sous sollicitation périodique symétrique relativement à l'origine, l'allongement vaut donc, par demie-période, 4 fois celui dû à la première charge. On note immédiatement que l'eq. (26) donne :

$$K = G^2 \text{ si } |G| \ll G_0 \; ; \; K - K_R = 2G_0 \cdot (G - G_R)^2 \text{ si } |G - G_R| \ll 2G_0 \quad (27)$$

$$K = G_0 G \text{ si } |G| \gg G_0 \; ; \; K - K_R = 2G_0 \cdot (G - G_R) \text{ si } |G - G_R| \gg 2G_0 \quad (28)$$

Les relations (27) et (28) concernent respectivement les situations de proximité et d'éloignement de la quasi-reversibilité à droite de l'inversion.

Les relations (27) expriment que, en évolution quasi-reversible au sens de /1/ à /4/ ($|G| \ll G_0$ ou $|G - G_R| \ll 2 \cdot G_0$), l'effet Poynting cumulatif est, comme l'effet classique indépendant du corps, proportionnel au carré de G. L'effet Poynting est restaurable.

Les relations (28) expriment que, loin de la quasi-réversibilité ($|G| \gg G_0$ ou $|G - G_R| \gg 2 \cdot G_0$), l'effet Poynting cumulé est : linéaire en la déformation de cisaillement (ce que l'expérience suggère), varie peu pour les corps ayant des G_0 comparables (ce qui est observé), présente un caractère oligocyclique : $N_{oc} = 1/(4G_0)$, $\sum_1^{N_{oc}} 2 \cdot \Delta K = 2 \max|G|$, soit, par exemple : 250 cycles (Go = 0.001) pour les aciers, 125 cycles (Go = 0.002) pour les alliages d'aluminium. Notons encore que, pour les aciers, par exemple, l'allongement par demi-cycle symétrique est : K = 0.00002, soit 0.2 μ /cm, pour Go = 0.001 et une déformation

de cisaillement de $\pm$ 0.5 %. Ces valeurs sont réalistes.

3.3. Le schéma à un sens physique. Notons d'abord qu'il n'a ni l'inconvénient d'entraîner un rochet inverse symétrique par suppression de la charge axiale, ni le défaut de prévoir un supplément de rochet nul si l'on augmente l'amplitude de cisaillement tout en conservant la même charge axiale. D'autre part, le schéma exprime la restauration (cf./2/) et le rôle du concept associé de mémoire discrète (à travers la forme de π , le scalaire ϕ et le tenseur $\sigma - \sigma_R$, c'est à dire de façon complète, étrangère à l'hypoélasticité ou à l'hyperélasticité).

4. Difficultés sous-jacentes dans les théories classiques

4.1. La tentative de schématisation classique (cf. /14/ /15/). Soit α_i les variables internes et Ai les affinités associées, ψ l'énergie libre spécifique, $\varphi(A)$ un potentiel convexe, semi-continu inférieurement, $\vec{q}$ la densité surfacique de taux de chaleur reçue par conduction. La théorie est fondée sur l'expression :

$$\rho \frac{ds}{dt} + div(\vec{q}/T) \geq 0 \tag{29}$$

du second principe et sur l'écriture :

$$\rho \frac{de}{dt} = tr(\sigma . \mathcal{D}) - div\, \vec{q} \tag{30}$$

du premier principe. Compte tenu de la définition de ψ et de (30) on obtient (29) sous la forme de Clausius-Duhem et l'on suppose découplées les dissipations thermiques et intrinsèques. Cette dernière :

$$\phi = \frac{1}{\rho} tr(\sigma . \mathcal{D}) - \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) = \Sigma_i A_i \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} = tr\, \sigma . \mathcal{D}^{\pi} - \hat{A}_i \frac{d\hat{\alpha}_i}{dt} \geq 0 \tag{31}$$

s'explicite grâce à l'hypothèse fondamentale : les taux des α_i s'expriment comme sous-gradients de φ . On obtient, par (31), l'équivalent d'une extension formelle de (1)$_3$. Cependant, lors de la mise en oeuvre, des difficultés opératoires apparaissent, alors même qu'il s'agit seulement de décrire les aspects les plus simples et les plus caractéristiques de l'hystérésis mécanique, à l'exclusion d'évolutions cycliques complexes et du cas de la température variable.

L'expression de ϕ donnée par (31) est-elle essentiellement formelle ? Les raisons d'une réponse positive semblent exister depuis longtemps /16/, être clairement suggérées /17/ et ont été récemment rappelées (cf./2/ /4/ /8/). L'essentiel peut être explicité ainsi.

Tout d'abord, pour que (29) ait un sens, il faut pouvoir définir s. Or, il est rarement rappelé, mais très connu, qu'il est facile de définir des systèmes bien représentatifs de l'hystérésis mécanique pour lesquels AUCUN trajet réversible n'est concevable : impossible dès lors, d'admettre l'existence d'un état d'équilibre "d'accompagnement" /18/ . Donc la définition de s reste un problème ouvert et (29) n'a pas de sens dans de tels cas physiquement significatifs. On note ensuite que, dans (30), ne figure pas de terme de densité volumique de taux de chaleur r_a reçue du fait des irréversibilités internes intrinsèques : l'expression (30) de la conservation de l'énergie présente une inadéquation fondamentale. D'autres indications pourraient concerner les variables d'état (conventionnelles, réglées par hypothèses ad-hoc de NO-GO). Les deux remarques retenues, suffisent pour distinguer comment l'usage du concept de potentiel implique la présence de difficultés majeures dès l'origine de la théorie : une tentative de redressement est actuellement amorcée (cf./19/et /20/ par exemple).

4.2. Remarque

S'agissant de situations expérimentales bien définies qui peuvent servir à valider tous les modèles actuellement connus, les résultats présentés ici doivent s'apprécier lorsqu'on connait les difficultés opératoires des théories à variables internes dans l'interprétation des cas les plus simples et les plus caractéristiques de l'hystérésis mécanique.

Face à l'urgence des besoins en matière d'applications techniques fondamentales, les conditions épistémologiques sont réunies pour que, sur la base des théories évoquées, se développent et de diffusent de nombreux modèles. Finalement, et faute d'une alternative à statut paradigmatique, les divers efforts consacrés aux constructions pratiques complètes - théories, modèles, étalonnages- doivent être poursuivis.

Dans de telles conditions on ne peut exclure l'accélération prochaine d'analyses plus compliquées : fatigue, thermoplasticité, rupture, anisotropie induite, physico-chimie sous contraintes, interactions de champs.

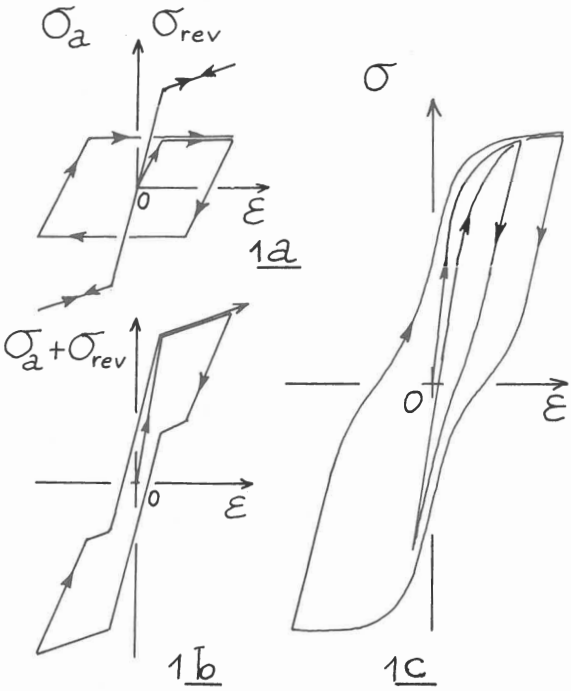

Figure 1 Superélasticité sans écrouissage.

Références

/1/ BOISSERIE, J. M., GUELIN, P., "Order, heat, intrinsic dissipation and inelastic analysis", Proceeding, 5th Intl. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, Germany, August 1979, Paper L 1/6, pp. 1-10.

/2/ GUELIN, P., "Remarques sur l'hystérésis mécanique : 1. Les bases d'un schéma thermomécanique à structure héréditaire", J. de Mécanique, 19, 2, pp. 217-247 (1980).

/3/ BOISSERIE, J. M., GUELIN, P., "Remarks on the tensorial formulation of constitutive laws describing mechanical hysteresis", Proceeding 4th Intl. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, August 1977, Paper L 1/9, pp. 1-15.

/4/ GUELIN, P., "Remarques sur l'hystérésis mécanique : 2. Ecrouissage, stabilité..", soumis au J. de Mécanique le 24 février 1978, révisé le 27 juin 1979, inédit, disponible en communication personnelle.

/5/ GUELIN, P., "Sur une extension, héréditaire à mémoire discrète, de l'équation de Gibbs : cinématiques triaxiales irrotationnelles", soumis aux C.R. Acad. Sc., Paris, le 17 juin 1980, inédit, disponible en communication personnelle.

/6/ GUELIN, P., "Sur une extension, héréditaire à mémoire discrète, de l'équation de Gibbs : effet superélastique et effet de mémoire de forme", soumis aux C.R. Acad. Sc., Paris, le 7 mai 1980, inédit, disponible en communication personnelle.

/7/ ASARO, R. J., "Elastic-plastic memory and kinematic-type hardening", Acta Metallurgica, 23, pp. 1255-1265 (1975).

/8/ GUELIN, P., "Sur une extension, héréditaire à mémoire discrète, de l'équation de Gibbs : réalité et virtualité", idem ref. (6).

/9/ OTSUKA, K., WAYMAN, C. M., NAKAI, K., SAKAMOTO, H., SHIMIZU, K., "Superelasticity effects and stress-induced martensitic transformations in Cu-Al-Ni alloys", Acta Metallurgica, 24, pp 207-226 (1976).

/10/ MULLER, I., "A model for a body with shape-memory", Arch. Rational Mech. Anal., 67, pp 61-77 (1978).

/11/ GUELIN, P., "Sur une extension, héréditaire à mémoire discrète, de l'équation de Gibbs : cinématiques triaxiales rotationnelles", idem réf. 5 .

/12/ WACK, B., "Second and third order effects in the torsion of a tube and a rod", à paraître, J. de Mécanique (1981).

/13/ WACK, B., TERRIEZ, J.M., GUELIN, P., "Cinématiques de torsion et effet du second ordre dans une description à structure héréditaire du continu anélastique", en soumission.

/14/ COLEMAN, B.D., GURTIN, M.E., "Thermodynamics with internal state variables", J. Chem. Phys., 47, pp 597-613 (1967).

/15/ HALPHEN, B., NGUYEN QUOC SON, "Sur les matériaux standards généralisés", J. de Mécanique, 14, pp 39-63 (1975).

/16/ BRIDGMAN, P.W., "The thermodynamics of plastic deformation and generalized entropy", Rev. Modern Phys., 22, pp 56-63 (1950).

/17/ RIVLIN, R.S., "Red-herring and sundry unidentified fish in non-linear continuum mechanics", Inelastic behavior of solids, Mc Graw-Hill, New-York, 1970.

/18/ PONTER, A.R.S., BATAILLE, J., KESTIN, J., "A thermodynamics model for time dependent plastic deformation of solids", J. de Mécanique, 18, 3, pp 512-5 (1979).

/19/ MANDEL, J., "Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte", C.R.A.S., Paris, 291 B (1980).

/20/ NGUYEN QUOC SON, "Sur l'application du second principe en présence d'une source de chaleur", C.R.A.S., Paris, 290, B (1980).

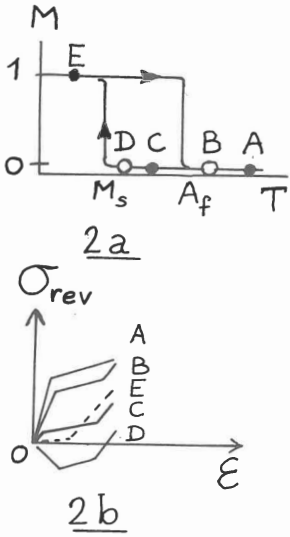

Figure 2 Variations M(T) et famille $\sigma_{rev}(\varepsilon)_T \ \forall T \in [T_E, T_A]$.

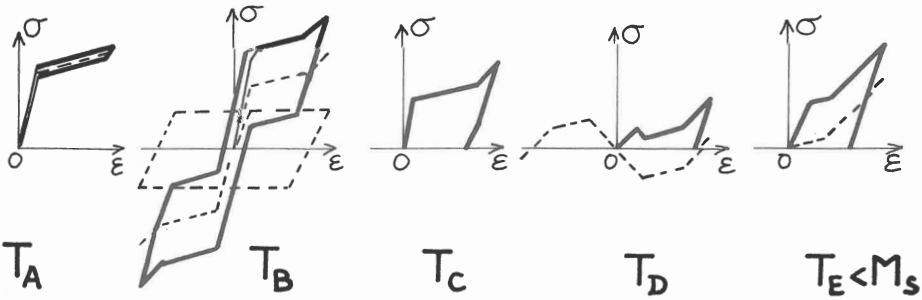

Figure 3 Schéma d'interprétation des effets de mémoire de forme ($T < M_s$).