REMARKS ON THE TENSORIAL FORMULATION OF CONSTITUTIVE LAWS DESCRIBING MECHANICAL HYSTERESIS

(Remarques sur la formulation tensorielle de lois constitutives décrivant l'hystérésis mécanique)

J. M. BOISSERIE

Électricité de France, Direction des Études et Recherches
Service Informatique et Mathématiques Appliquées
F-78400 Chatou, France

P. GUELIN

Institut de Mécanique de Grenoble, Université de Grenoble,
B.P. 53, Centre de Tri, F-38041 Grenoble Cedex, France

SUMMARY

The paper is devoted to a new approach of the tensorial formulation of constitutive laws describing hysteresis for simple non-aging inelastic materials which are supposed homogeneous, isotropic, at rest in the initial configuration.

a) The approach is based on the superposition of two types of stresses σ_a and σ_h which sum is the effective stress σ. The use of such a *superposition principle for stresses* is connected with experimental results briefly summarized as follows: under large strain or low-cycle fatigue, microstructure and macroscopic properties of solids become steady, well-defined, weakly dependent of the initial state. The σ_a contribution deals with these steady aspects and the σ_h term is a hereditary perturbation assumed to be also a sum of two stresses σ_v and/or σ_g taking into account rate sensitive and/or strain hardening. The σ_v and σ_g terms are convolution products on $R+$ of differential elements (dimension of stress) by a *scalar* memory function, the main point being that this convolution is done in the corotational frame. So, in the tensorial case, *objectivity* requirements are automatically verified.

b) Concerning the σ_a contribution, the well-known models with springs and friction-slider elements, unrealistic in 3 dimensions, are used as an heuristic tool. A scalar auxiliary function W, closely related to dissipated energy is introduced. The definition of W is easy in the tensorial case. The W variations are supposed to be non-decreasing, piecewise continuous. The loading-unloading criterion is defined from the virtual breach of the discontinuous growth law of W: on the inversion point of evolution the virtual variation δW compatible with boundary conditions is negative. Between two inversion points the description can be done "locally by pieces".

c) In the case of rate sensitive contribution, σ_v, Guelin and Stutz, Arch. Mech. Stos. 29/1(1977)13, give results on constant strain rate traction test, creep test and low-cycle fatigue. The strain hardening term, σ_g, allows us to describe such classical effects as: strain hardening of recrystallization peak stress, associated in this approach with short range, strong memory effects; cyclic creep associated with long range, weak memory effects; cyclic relaxation related to long range, strong memory effects.

The approach concerns large strain, gives asymptotic properties in agreement with classical theories, allows—by the use of one law—to take into account several observed properties, introduces only a small number of parameters—of simple physical interpretation—, is compatible with numerical technics for approximations of associated Lagrangian functions on a suitable linear space (a simple boundary value problem is presented in the case of the low-cycle of a stainless steel structure).

1. Introduction

Les résultats d'essais mécaniques effectués sur des continus (à comportement solide) aussi différents que les aciers inoxydables et les milieux granulaires, conduisent à noter l'existence d'une stationnarité de propriétés au sens suivant : sur une part importante des évolutions possibles, certaines grandeurs (ou aspects) du phénomène, physiquement caractéristiques, conservent des valeurs (ou propriétés) constantes ou périodiquement restaurées. Les essais de traction simple sur divers alliages de cuivre illustrent par exemple le cas d'une contrainte limite obtenue par déformation monotone croissante avec ou sans apparition d'un effet de pic de contrainte (Fig. 1a d'après [1]). Dans des conditions analogues de température relative et de vitesse de déformation cet effet de pic peut ne pas apparaître (Fig. 1B d'après [2]). D'autres essais, du type de fatigue, relatifs aux aciers inoxydables par exemple, indiquent la restauration périodique des propriétés sur les segments d'évolution accommodée à la suite d'une forte consolidation. Cette consolidation peut d'ailleurs subsister à température élevée [25]. Enfin la stationnarité apériodique des deux premiers exemples et celle périodique des suivants peuvent être observées pour un matériau pulvérulent - sable sec - après effet de pic et accommodation rapide (Fig. 1C d'après [3]). A propos de ce dernier cas on note que l'idée de stationnarité peut revêtir divers aspects. Tout d'abord un ensemble de scalaires, et non un seul, peut tendre vers une limite. Cette situation correspond au cas de l'écoulement plastique limite du milieu granulaire sous état de contrainte constant : sont alors constants les 3 invariants de contrainte mais aussi la densité de masse ρ dont la valeur initiale $\rho(\sigma)$ conditionne les propriétés transitoires du continu (effet de pic) mais non les propriétés limites (cf. [4] [5] et Fig. 1D). D'autre part, toujours pour les milieux granulaires, la restauration périodique des propriétés s'observe non seulement pour la partie déviatoire du comportement mais également pour la partie isotrope (cf. Fig. 1C).

Ces observations font ressortir les difficultés d'une définition de l'idée de stationnarité. Cette notion sera précisée grâce à la forme de la loi constitutive proposée. Cette loi conduit en effet à préciser le caractère stationnaire et peu dépendant de l'état initial des propriétés de continus solides sollicités en grandes déformations monotones ou cycliques.

2. Mise en oeuvre d'une superposition de contrainte

On exploite le contenu heuristique de l'idée ci-dessus sous la forme d'une superposition de contrainte et de taux de contrainte [6] . Dans ce dernier cas la superposition est faite en repères corotationnels $\mathcal{R}$ de façon à satisfaire au principe d'objectivité matérielle.

2.1. La contrainte effective σ, de Cauchy, est en général, la somme :

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_g + \sigma_v \qquad (1)$$

de deux contributions à mémoire continue, σ_g et σ_v , et d'une contribution à mémoire discontinue σ_a. Les termes σ_g et σ_v sont associés aux modifications de propriétés indépendantes (σ_g) ou dépendantes (σ_v) de la loi de temps de l'évolution. Le terme σ_a représente la partie principale des propriétés stationnaires.

2.2. On suppose que σ_g et σ_v sont des produits de convolution sur R+ d'éléments de contraintes $d\Sigma_g$ et $d\Sigma_v$ par des fonctions mémoires scalaires $\varphi(v)$ et $\chi(u)$ respectivement, ces convolutions étant faites en repères corotationnels R. Les variables u et v sont le temps intérieur : $u = t - \tau$ et l'abscisse d'écrouissage : $v = X - x$, à définir. Les contributions σ_g et σ_v sont donc des sommes infinies, effectuées dans R, d'éléments de contraintes pondérées par les mémoires associées.

2.3. Les mémoires χ et φ sont supposées positives décroissantes continues sur leurs supports respectifs bornés par t_c et X_c. Si $\mathcal{D}$ note la vitesse de déformation, on suppose que le corps est au repos : $\mathcal{D} = 0$ depuis un laps de temps au moins égal à t_c. Dans cette configuration de référence : $t = 0$, $X = X_0$.

2.4. On introduit, comme en [7], l'effet d'écrouissage permanent en vitesse de déformation, en supposant qu'en général χ est une fonction prise au sens des distributions, un Heaviside - mémoire totale - étant attaché à l'état actuel. Soit $A_v(\eta)$ une fonction scalaire stationnaire aux grandes valeurs du scalaire η que l'on définira plus loin. On pose :

$$\sigma_v = \left(\frac{d\Sigma_v}{d\tau}\right) * \chi_t + \left(A_v \frac{d\Sigma_v}{d\tau}\right) * H_t \qquad (* \text{ dans } \mathcal{R}) \tag{2}$$

2.5. Le taux de Σ_v est supposé de la forme visqueuse pure :

$$d\Sigma_v = f_v(\mathcal{D})\, d\tau \tag{3}$$

où f_v est une fonction tensorielle isotrope qui s'écrie en général :

$$f_v = M_0(E_i)\, E_1\, \delta + M_1(E_i)\, \mathcal{D} + M_2(E_i)\, \mathcal{D}^2 \tag{4}$$

avec :

$$E_1 = \mathcal{D}_{ii} \; ; \; E_2 \equiv \bar{E}_2^2 = \bar{\mathcal{D}}_{ij}\bar{\mathcal{D}}_{ji} \; ; \; E_3 \equiv \bar{E}_3^3 = \bar{\mathcal{D}}_{ij}\bar{\mathcal{D}}_{jk}\bar{\mathcal{D}}_{ki} \tag{5}$$

2.6. La contribution σ_g est supposée de forme analogue à σ_v :

$$\sigma_g = \left(\frac{d\Sigma_g}{dx}\right) * \varphi_X + \left(A_g \frac{d\Sigma_g}{dx}\right) * H_X \qquad (* \text{ dans } \mathcal{R}) \tag{6}$$

où A_g est, comme A_v, stationnaire aux grandes valeurs de η.

3. Remarques sur certains schémas décrivant l'hystérésis mécanique

En vue d'introduire la définition de la contribution σ_a, de préciser celle de σ_g qui s'y trouve étroitement liée, de définir x par son élément dx et de définir enfin le scalaire η, on considère ici des schémas à une dimension décrivant certains des principaux aspects de l'hystérésis mécanique.

3.1. Les "modèles" considérés sont constitués d'une infinité de ressorts (flexibilité J, raideur G) et de patins (seuils s), disposés en suite infinie (parallèle ou série) de couples ressort-patin associés (en série ou en parallèle). On sait que ces modèles sont "équivalents" en ce sens qu'il existe un unique modèle série (parallèle) de propriété identique à un modèle parallèle (série) donné ([8], [9], [10]). Ces modèles permettent de définir une correspondance entre variations $\Delta\varepsilon$ et $\Delta\sigma$ des grandeurs mécaniques déformation ε, contrainte σ, à condition de mettre en oeuvre une règle logique : de Masing dans certains cas simples, de Nayroles plus généralement. Il est à noter que la notion de plasticité n'est pas introduite dans la description. Considérons pour un modèle série l'évolution OAB et le diagramme de Nayroles associé (cf. Fig. 2a et 2b). Soit $g''(s)$ la fonction spectrale des déformabilités des

couples de seuils compris entre Δ et $\Delta + d\Delta$ ($j(0) = j'(0) = 0$) . Sur OA, et avec : $\sigma(0) = 0$, $\Delta^0\sigma \equiv \sigma$, on a :

$$\Delta^0\varepsilon = \varepsilon = J_0 \Delta^0\sigma + \int_0^{\Delta^0\sigma} (\Delta^0\sigma - \Delta)\, j''(\Delta)\, d\Delta = E(\Delta^0\sigma) = J_0 \Delta^0\sigma + j(\Delta^0\sigma) \; ; \; E'' = j''$$

et sur AB :

$$\Delta^1\varepsilon = \overset{1}{\varepsilon} - \varepsilon = 2\left[J_0 \frac{\Delta^1\sigma}{2} + \int_0^{\frac{\Delta^1\sigma}{2}} \left(\frac{\Delta^1\sigma}{2} - \Delta\right) j''(\Delta)\, d\Delta \right] = 2\, E\left(\frac{\Delta^1\sigma}{2}\right)$$

d'où il ressort la règle de Masing. En considérant, de façon analogue un modèle parallèle de fonction spectrale $g''(e)$ des modules de rigidité des couples de seuils de déformation compris entre e et e + de (g(o) = g'(o) = 0), on a :

$$\Delta^0\sigma = \sigma = G_0 \Delta^0\varepsilon - \int_0^{\Delta^0\varepsilon} (\Delta^0\varepsilon - e)\, g''(e)\, de = S(\Delta^0\varepsilon) = G_0 \Delta^0\varepsilon - g(\Delta^0\varepsilon) \quad (S'' = -g'')$$

$$\Delta^1\sigma = \overset{1}{\sigma} - \sigma = 2\left[G_0 \frac{\Delta^1\varepsilon}{2} - \int_0^{\frac{\Delta^1\varepsilon}{2}} \left(\frac{\Delta^1\varepsilon}{2} - e\right) g''(e)\, de \right] = 2\, S\left(\frac{\Delta^1\varepsilon}{2}\right)$$

3.2. Soit : w = 1 ou 2 le paramètre de Masing. Les correspondances : $\Delta\varepsilon \Leftrightarrow \Delta\sigma$ ci-dessus sont dites "locales par branche" sur OA ou AB et sont alors de la forme : $\Delta\sigma = \omega\, S(\Delta\varepsilon/\omega)$. Soit W la fonction locale par branche ou fonction "d'aide" :

$$W(\Delta^0\varepsilon) = \frac{1}{2} G_0 \Delta^0\varepsilon^2 - U(\Delta^0\varepsilon) = \frac{1}{2} G_0 \Delta^0\varepsilon^2 - \int_0^{\Delta^0\varepsilon} \frac{1}{2}(\Delta^0\varepsilon - e)^2\, U'''(e)\, de$$

convexe ($W'' \geqslant 0 \;\; \forall M \in OA$) et définie par :

$$U''' - g'' = U''(0) = U'(0) = U(0) = 0$$

La correspondance : $\sigma \Leftrightarrow \varepsilon$ peut être définie "localement par branche" selon : $\Delta\sigma \Leftrightarrow \Delta\varepsilon$ en posant :

$$\Delta\sigma = dW_L / d\Delta\varepsilon \tag{7}$$

avec :

$$W_L(\Delta\varepsilon) = \omega^2\, W(\Delta\varepsilon/\omega) \; ; \; W_L'' \geqslant 0 \; ; \; \omega = 1 \text{ ou } 2 \tag{8}$$

Soit, Fig. 2a, une évolution OAEFG... telle que : $2\,\Delta^0\varepsilon_{OE} > \Delta^1\varepsilon_{EF} > \Delta^2\varepsilon_{FG}$ dite cyclique simple. Le rôle algorithmique privilégié est celui de ω . Le graphe de W_L a l'allure indiquée Fig. 3. On sait ([11] par exemple) qu'en général l'algorithme de Nayroles, Fig. 2b, doit être employé.

3.3. Soit en effet l'évolution OABCDE (cf. Fig. 2a). Elle respecte : $2\Delta^0\varepsilon > \Delta^1\varepsilon$ mais pas : $\Delta^1\varepsilon > \Delta^2\varepsilon$. On peut encore définir $\Delta\sigma$ par l'éq. (7) et ceci même le long de DE à condition de faire $\omega = 1$ et de se référer à l'état initial. Sinon on obtient l'évolution aberrante BCDD' : la règle de Masing ne suffit plus et le diagramme de Nayroles est nécessaire (cf. Fig. 2b). Lors du parcours de l'arc BD, la ligne d'état $OS_3 S_2 S_1$ conserve ses points anguleux : l'information $\Delta^1\varepsilon$ est donc mémorisée par S_1 le long de ABCD, effacée le long de DE. La variation de W_L est celle de la Fig. 4.

Si l'évolution est très complexe la quantité d'informations discrètes à mémoriser peut être très grande. C'est le cas pour une évolution telle que OAEFG... (cf. Fig. 2) présentant une suite de trajectoires EF, FG, ... d'amplitude lentement décroissante. Ces informations restent stockées dans la ligne d'état du diagramme de Nayrolles en prévision d'une utilisation éventuelle lors d'une sollicitation monotone d'amplitude croissante.

3.4. On fait l'hypothèse : l'évolution de la fonction d'aide W_L est définie continue non décroissante par morceaux, de sorte que : $dW_L \geqslant 0$ et que l'on propose le critère de charge décharge suivant : soit, dans le voisinage passé de t, une description locale (7), (8) associée à W, et, entre t et $t + dt$, une variation virtuelle $\delta\Delta\varepsilon$ de $\Delta\varepsilon$ compatible avec la

sollicitation $\mathcal{D}$ imposée à la frontière. Si, avec l'éq. (8), la variation virtuelle δW_L de W_L est négative, t est instant d'inversion t^I effectivement rencontré. Le critère :

$$\delta W_L < 0 \tag{9}$$

est, dans la suite, étendu au cas tensoriel. Si : $\delta W_L = 0$, le segment d'évolution associé est de chargement "neutre" (cf. [14]) et peut, par convention, appartenir à la "branche" actuelle, de support défini ci-dessous (cf. éq. (10)). Par les éq. (7), (8) et (9) on voit que le graphe de $W_L(t)$ présente les discontinuités de première espèce :

$$W_L(t^I_+) = 0 \; ; \; W_L(t^I_-) > 0 \; ; \; dW(t^I_+) = 0 \tag{10}$$

qui déterminent les supports de "branche". Par convention, la première branche peut être dite de charge. Le graphe $\eta(t)$ tel que :

$$d\eta = dW_L = \Delta\sigma \; d\,\Delta\varepsilon \geqslant 0 \tag{11}$$

des variations totales de W_L présente les discontinuités de première espèce

$$W_L(t^I_{\alpha-}) \neq W_L(t^I_{\alpha+}) \tag{12}$$

et les instants ou états associés sont de changement d'arc de branche. Ils sont déterminés par diagramme, analogue à celui de Nayroles, mais portant sur la fonction locale W_L . La construction de ce diagramme est encore basée sur une propriété signalée en [12] au sujet des systèmes dynamiques déferlants. Ce diagramme détermine la valeur actuelle de ω, la suite des $t^{M,I}_\alpha \in \{t^I\}$ effectivement mémorisés lors du parcours de l'arc α de la branche I et l'état de référence $(\varepsilon, \sigma)^I_{R\alpha}$ associé à $t^I_{R\alpha} \in \{t^{M,I}\}$ et pris en compte lors du parcours de l'arc α de la I^{eme} branche.

Une évolution cyclique simple (cf. 3.2) est à branche monoarc.

Les graphes de la Fig. 5 indiquent les aspects classiques des évolutions obtenues. Avec l'éq. (11) on a :

$$\eta = \int_0^t (\sigma - \overset{K}{\sigma}_{R\beta})_\tau \, \mathcal{D}(\tau) \, d\tau \tag{13}$$

4. <u>Forme de la loi constitutive</u>

4.1. On envisage d'abord le cas limite du matériau sans écrouissage : $\sigma = \sigma_a$, $\sigma_g = \sigma_v = 0$ Une description locale par arc de branche peut être envisagée comme au § 3 ci-dessus. Supposons étendue au cas tensoriel la définition du critère (9) et de l'algorithme de la fonction locale. Il est alors possible d'introduire $\sigma^I_{aR\alpha}$, tenseur σ_a de référence lors de la description du α^{eme} arc de la I^{eme} branche, analogue à σ_R dans l'éq. (13). On pose :

$$\frac{d\sigma_a}{dt} = h(\sigma_a - \sigma^I_{aR\alpha}, \mathcal{D}) \quad \forall t \in [t^I_\alpha, t^I_{\alpha+1}] \tag{14}$$

Le taux de σ_a est défini dans $\mathcal{R}$ et h est une fonction tensorielle isotrope, s'annulant avec $\mathcal{D}$, de la forme :

$$h = a_0 \delta + a_1 \mathcal{D} + a_2 (\sigma_a - \sigma^I_{aR\alpha}) \tag{15}$$

homogène de degré - 1 par rapport au temps grâce à :

$$a_0 = \alpha_0 E_1 + \alpha_3 \Delta\overline{M} + \alpha_5 \Delta\overline{N} \; ; \; a_1 = \alpha_1 \; ; \; a_2 = \alpha_2 E_1 + \alpha_4 \Delta\overline{M} + \alpha_6 \Delta\overline{N} \tag{16}$$

où :

$$\overline{\Delta M} = (\bar{\sigma} - \overset{I}{\bar{\sigma}}_{R\alpha})_{ij}\,\bar{\mathcal{D}}_{ji} \;;\; \overline{\Delta N} = (\bar{\sigma} - \overset{I}{\bar{\sigma}}_{R\alpha})_{ij}(\bar{\sigma} - \overset{I}{\bar{\sigma}}_{R\alpha})_{jk}\,\bar{\mathcal{D}}_{ki} \tag{17}$$

et où les α sont des fonctions scalaires des invariants :

$$\Delta S_1 = (\sigma - \overset{I}{\bar{\sigma}}_{R\alpha})_{ii} \;;\; \overline{\Delta S}_2^{\,2} = (\bar{\sigma} - \overset{I}{\bar{\sigma}}_{R\alpha})_{ij}(\bar{\sigma} - \overset{I}{\bar{\sigma}}_{R\alpha})_{ji} \;;\; \overline{\Delta S}_3^{\,3} = \cdots \tag{18}$$

Pour $\mathcal{D}$ imposé l'éq. (14) détermine une évolution d'hystérésis pure qui dans le cas d'un corps réel sera dite squelette. Par définition cette évolution squelette ne présente pas d'écrouissage et doit d'autre part rendre compte du comportement du genre plastique en ce qui concerne la partie déviatoire de la loi constitutive. Pour de nombreux corps réel on a en effet : $\bar{\sigma} \simeq \bar{\sigma}_a$ en présence de comportement plastique. L'examen ultérieur des conditions de plasticité imposées aux éq. (14), (15), (16) en l'absence d'écrouissage, amènera à considérer une forme simplifiée de l'éq. (16).

4.2. On suppose que dans l'éq. (6) le taux de Σ_g est de la forme :

$$d\Sigma_g = f_g \frac{dt}{dx}\,dx \tag{19}$$

qui est proportionnel à un élément différentiel $d\gamma$ de déformation si f_g est identique à $\mathcal{D}$. On suppose alors que $\mathcal{D}$ s'explicite à partir d'une forme analogue à l'éq. (15), de sorte que l'on pose :

$$f_g(\equiv \mathcal{D}) = \dot{\sigma}_a - g_0\,\delta - g_2(\sigma_a - \overset{I}{\sigma}_{aR\alpha}) \tag{20}$$

L'introduction de cette fonction tensorielle isotrope permet d'obtenir l'homogénéité de degré - 1 par rapport au temps de façon comparable à l'éq. (16) soit par :

$$g_0 = \gamma_0 E_1 + \gamma_3 \overline{\Delta M} + \gamma_5 \overline{\Delta N} \;;\; g_2 = \gamma_2 E_1 + \gamma_4 \overline{\Delta M} + \gamma_6 \overline{\Delta N} \tag{21}$$

où les γ_i dépendent des ΔS_i et de η.

4.3. On étend les éq. (11) et (13) au cas tensoriel selon :

$$\eta = \int_0^t (\sigma_a - \overset{I}{\sigma}_{aR\alpha})\,\mathcal{D}(\tau)\,d\tau \;;\; dx = d\eta \tag{22}$$

de sorte que l'évolution squelette fictive associée joue, comme dans les éq. (19) à (21) un rôle privilégié. La définition (22) permet d'obtenir l'extension de la fonction locale donc, comme en 3.4. ci-dessus, l'algorithme associé au diagramme de la fonction locale. Compte tenu de la définition de l'état de référence à : $t = 0$, $X = X_0$ (cf. § 2.3), avec les éq. (14), (3), (19), par dérivation des éq. (2) et (6) et en posant :

$$\begin{aligned} &a = 0 \;\forall\, t \leq t_c \;;\; a = t - t_c \;\forall\, t > t_c \\ &b = X_0 \;\forall\, X - X_0 \leq X_c \;;\; b = X - X_c \;\forall\, X - X_0 > X_c \end{aligned} \tag{23}$$

on obtient une loi constitutive de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = {} & h(\sigma - \sigma_R, \mathcal{D}) + A_v f_v(\mathcal{D}) + A_g f_g(\dot{\sigma}, \sigma - \sigma_R) + \\ & \chi(0) f_v(\mathcal{D}) + \int_a^t \chi'(t-\tau) f_v[\mathcal{D}(\tau)]\,d\tau + \\ & \varphi(0) f_g(\dot{\sigma}, \sigma - \sigma_R) + \frac{dX}{dt}\int_b^X \varphi'(X - x) f_g(\dot{\sigma}, \sigma - \sigma_R)_x \frac{dt}{dx}\,dx \end{aligned} \tag{24}$$

On a supposé que dans l'expression de la loi complète la contrainte effective σ joue un rôle privilégié et remplace σ_a. La méthode de définition de l'éq. (24) présente des analo-

gies avec celles envisagées en [13], [14] et [15]. Une discussion complète des éq. (22) et (24) doit tenir compte des résultats de [16] à [21].

4.4. On peut démontrer que si : $\mathcal{D}=0 \ \forall t > T_1$, l'éq. (24) devient une équation non intégrale dont la solution est : $\dot{\sigma}=0$, de sorte que le comportement est solide. D'autre part sous σ maintenu constant, $\mathcal{D}$ est déterminé par une équation implicite de sorte que l'éq. (24) décrit un comportement de fluage. Enfin supposons que h soit de la forme $\bar{h}(\sigma)\mathcal{D}$ et que : $f_v=\bar{f}_{v0}\mathcal{D}$ ou $\bar{f}_{v0}$ est un scalaire constant $\forall(E_i)\in V$, domaine de vitesse de déformation caractéristique du corps. Il peut exister une évolution telle que $\sigma=\sigma_0, E_1=0$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ indéterminés tendant vers une limite. Car :

$$0=\bar{h}\mathcal{D}+A_v\bar{f}_{v0}\mathcal{D}+A_g f_g[0,\sigma_0;0,\bar{M},\bar{N}]+$$
$$\varphi(0)f_g[0,\sigma_0;0,\bar{M},\bar{N}]+\int_b^X \varphi'(X-x)f_g(x)\frac{dX}{dx}\,dx$$

donne, du fait que : $1=\lim_{\eta\to\infty} dX/dx$, une condition habituelle d'indétermination de $\mathcal{D}$ modifiée par les termes : d'écrouissage en $\mathcal{D}$ (comme en [7]) et d'écrouissage en déformation. Ainsi la surface limite dépend de l'écrouissage.

4.5. Les remarques du point 4.4. permettent d'introduire une définition des propriétés stationnaires. Si $\eta\to\infty$ et compte tenu du caractère borné des supports de χ et φ , l'éq. (24) se réduit à une forme non intégrodifférentielle permettant l'existence d'un état limite de plasticité ou d'un cycle limite. L'ensemble de ces états et cycles forme les propriétés stationnaires qui dépendent donc à la fois du squelette, des termes d'écrouissage permanent des éq. (2) et (6) et de la forme de φ et χ .

5. Conditions restrictives et formulation finale de la loi constitutive

5.1. On restreint les formes de χ et φ à :

$$\chi(u)=[\exp(-u/m_v)-\varepsilon_v]/(1-\varepsilon_v) \ \forall u\in[0,t_c], t_c=-m_v\log\varepsilon_v \quad (25)$$

et de même pour $\varphi(v)/\varphi(0)$ en introduisant m_g et ε_g tels que

$$X_c=-m_g\log\varepsilon_g \quad (26)$$

5.2. On pose : $M_2=0$ dans l'éq. (4) ce qui revient à négliger les termes dont la puissance dissipée associée est nulle en petites déformations. Cela interdit également que la contribution σ_v puisse être telle qu'une cinématique purement déviatoire génère une contribution isotrope et que les axes principaux de σ_v et $\mathcal{D}$ ne coïncident pas.

5.3. La contribution σ_2 doit être l'objet d'un examen attentif du fait qu'elle traduit les grandes lignes des propriétés dans les situations courantes de température et de vitesse de déformation. Suivant le point 4.1 l'évolution squelette doit permettre l'écoulement plastique pour l'état de contrainte : $(S_1, \bar{S}_2^2, \bar{S}_3^3)\in G$, surface limite. Considérons la première sollicitation monotone à partir de l'état neutre. La loi squelette (14), (15), (16) doit fournir un système linéaire indéterminé en $E_1, \bar{M}, \bar{N}$ avec système réduit à solution non nulle. On montre immédiatement (méthode indiquée dans [22] à [24] par exemple) que sous la condition : E_1 non indéterminé, on a :

$$\alpha_1>0 \ ; \ 3\alpha_3+\alpha_4 S_1=3\alpha_5+\alpha_6 S_1=\alpha_1+\alpha_4\bar{S}_2^2+\alpha_6\bar{S}_3^3 \quad (27)$$
$$h_0=3\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 S_1\neq 0$$

A l'état limite E_1 et $\bar{N}$ s'expriment en fonction de $\bar{M}$, indéterminé. Si la contrainte

limite est constante on retrouve la plasticité :

$$\bar{\mathcal{D}} = \lambda\,\bar{\sigma} \;;\; E_1 = 0 \;;\; \lambda = \bar{M}/\bar{S}_2^2 = \bar{N}/\bar{S}_3^3$$

Si la contrainte limite parcourt la surface G, la forme inverse est :

$$E_1 = \dot{S}_1 / k_0 \;;\; \bar{N} = [\alpha_2 \bar{S}_3^3 \dot{S}_1 - k_0 \tfrac{1}{3} \dot{\bar{S}}_3^3 + k_0 \alpha_4 \bar{S}_3^3 \bar{M}] / k_0 \alpha_4 \bar{S}_2^2$$

avec :

$$\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{S}_2^2} \frac{\partial G}{\partial S_1} = \frac{1}{k_0 \alpha_4 \bar{S}_2^2} 2 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2} = \frac{1}{k_0 \alpha_6 \bar{S}_2^2} 3 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3} \tag{28}$$

et la forme directe est :

$$\dot{S}_{a1} = k_0 E_1 \;;\; \dot{\bar{\sigma}}_{a\,ij} = \alpha_1 \bar{\mathcal{D}}_{ij} + (\alpha_2 E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N})\, \bar{\sigma}_{a\,ij} \tag{29}$$

Avec la 4ème condition (27) et (28), on a, si : $\alpha_2 \neq 0$:

$$(3\alpha_0 + \alpha_1) \frac{\partial G}{\partial S_1} + \alpha_2 \left(S_1 \frac{\partial G}{\partial S_1} + 2 \bar{S}_2^2 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2} + 3 \bar{S}_3^3 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3} \right) = 0$$

Si par contre : $\alpha_2 = 0$, l'éq. (28) donne d'une part : $\partial G / \partial S_1 = 0$ et de plus :

$$\alpha_4 = -2\alpha_1 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2} \Big/ \left(2\bar{S}_2^2 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2} + 3\bar{S}_3^3 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3} \right) \;;\; \alpha_6 = -3\alpha_1 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3} \Big/ \left(2\bar{S}_2^2 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2} + 3\bar{S}_3^3 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3} \right)$$

S'agissant de continus tels que les métaux on peut retenir ce dernier cas et l'éq. (29) avec $\alpha_2 = 0$. Les constantes du squelettes sont α_0, α_1 et celles impliquées par la définition de : $G(\bar{S}_2^2, \bar{S}_3^3) = 0$

5.4. On observe que le choix qui vient d'être fait - G homogène ou non - correspond à la distinction entre milieu cohérent et non cohérent. Cette distinction est faite avant toute introduction de termes d'écrouissage. Sur la base de l'éq. (29) la loi squelette associée est :

$$\dot{S}_{a1} = (3\alpha_0 + \alpha_1) E_1 \;;\; \dot{\bar{\sigma}}_{a\,ij} = \alpha_1 \bar{\mathcal{D}}_{ij} + (\alpha_4 \Delta\bar{M} + \alpha_6 \Delta\bar{N})(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{R\alpha})_{ij} \tag{30}$$

qui ne présente pas de couplage isotrope-déviatoire et dont la partie isotrope est reversible. Le squelette est à élasticité pure et à hystérésis pure. On fait l'hypothèse d'un découplage isotrope - déviatoire analogue pour les termes d'écrouissage. Ceux d'écrouissage en $\mathcal{D}$ ayant déjà été envisagées dans [7] sont ici négligés. Avec les éq. (20) et (21) il est naturel de prendre les scalaires γ_i sous la forme : $\alpha_i \overset{\infty}{\gamma}_i \bar{\gamma}_i(\eta)$, $0 \leq \bar{\gamma} \leq 1$, $1 = \lim_{\eta \to \infty} \bar{\gamma}$. Les termes d'écrouissages en déformation sont alors découplés si l'on suppose vérifiée une condition analogue aux 2ème et 3ème éq. (27), à savoir :

$$\overset{\infty}{\gamma}_3 \bar{\gamma}_3 = \overset{\infty}{\gamma}_4 \bar{\gamma}_4 \;;\; \overset{\infty}{\gamma}_5 \bar{\gamma}_5 = \overset{\infty}{\gamma}_6 \bar{\gamma}_6$$

Compte tenu des éq. (20) (21) et (30) la décomposition de l'éq. (24) est :

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 = {} & (3_0 + \alpha_1) E_1 + A_g [\dot{S}_1 - 3\alpha_0 \overset{\infty}{\gamma}_0 \bar{\gamma}_0(\eta) E_1] + \varphi(0) [\dot{S}_1 - 3\alpha_0 \overset{\infty}{\gamma}_0 \bar{\gamma}_0(\eta) E_1] + \\ & - \frac{dX}{dt} \frac{\varphi(0)}{m_g(1-\varepsilon_g)} \int_b^X e^{-\frac{X-x}{m_g}} [\dot{S}_1 - 3\alpha_0 \overset{\infty}{\gamma}_0 \bar{\gamma}_0 E_1]_x \frac{dt}{dx}\, dx \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}}_{ij} = {} & \alpha_1 \bar{\mathcal{D}}_{ij} + (\alpha_4 \Delta\bar{M} + \alpha_6 \Delta\bar{N})(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R) + A_g [\dot{\bar{\sigma}} - (\alpha_4 \overset{\infty}{\gamma}_4 \bar{\gamma}_4 \Delta\bar{M} + \alpha_6 \overset{\infty}{\gamma}_6 \bar{\gamma}_6 \Delta\bar{N})(\sigma - \sigma_R)] \\ & + \varphi(0) [\dot{\bar{\sigma}} - (\alpha_4 \overset{\infty}{\gamma}_4 \bar{\gamma}_4 \Delta\bar{M} + \cdots)(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R)] - \frac{dX}{dt} \frac{\varphi(0)}{m_g(1-\varepsilon_g)} \int_b^X e^{-\frac{X-x}{m_g}} [\dot{\bar{\sigma}} - (\alpha_4 \gamma_4 \gamma_4 \Delta M + \cdots] \frac{dt}{dx}\, dx \end{aligned}$$

Il est clair qu'un découplage total exige le découplage de l'éq. (22). Un tel découplage total n'a pas de justifications théoriques, c'est à dire déduites par exemple de la théorie

de représentation tensorielle ou de principes thermodynamiques. Il peut être éventuellement justifié par l'efficacité de la description ou, mieux, par des informations relatives aux mécanismes structuraux à fine échelle. Prenons simplement : $A_g = cste$, $\alpha_6 = 0$. En éliminant la possibilité de consolidation isotrope par : $\overset{\infty}{\gamma}_0 = 0$, l'éq. (31) devient :

$$(1-A_g)\dot{S}_1 = (3\alpha_0+\alpha_1)E_1 + \frac{dX_1}{dt}\frac{d}{dX_1}\int_{b_1}^{X_1}\frac{\varphi(0)}{1-\varepsilon_g}\left[\exp\left(-\frac{X_1-x}{m_g}\right)-\varepsilon_g\right]\dot{S}_1(x)\frac{dt}{dx}dx$$

$$(1-A_g)\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \alpha_1\bar{\mathcal{D}} + \alpha_4\overline{\Delta M}\left[1-A_g\overset{\infty}{\gamma}_4\bar{\gamma}_4(\eta)\right](\bar{\sigma}-\dot{\bar{\sigma}}_R) + \tag{32}$$

$$\frac{d\bar{X}}{dt}\frac{d}{d\bar{X}}\int_b^{\bar{X}}\frac{\varphi(0)}{1-\varepsilon_g}\left[\exp\left(-\frac{\bar{X}-x}{m_g}\right)-\varepsilon_g\right]\left[\dot{\bar{\sigma}}-\alpha_4\overset{\infty}{\gamma}_4\bar{\gamma}_4(\eta)\overline{\Delta M}(\bar{\sigma}-\bar{\sigma})\right]\frac{dt}{dx}dx$$

avec : $d\bar{x} = (\bar{\sigma}_2 - \overset{I}{\bar{\sigma}}_{2R\alpha})\bar{\mathcal{D}}\,dt$; $dx_1 = (S_1 - \overset{I}{S}_1)\,E_1\,dt$ (33)

Cette forme particulière est suffisante pour illustrer les propriétés de la définition plus générale proposée par l'éq. (24). On peut en effet distinguer à l'aide de l'éq. (32) les rôles respectifs des termes intégraux et en: $\gamma_4\,\overline{\Delta M}(\bar{\sigma}-\bar{\sigma}_R)$, responsables respectivement des effets de pic et de la consolidation (écrouissage transitoire et permanent). Cette analyse peut d'ailleurs être effectuée à l'aide d'une approximation de l'éq. (32) dont l'interprétation géométrique est faite sur la Fig. 6. Cette approximation revient à ne pas remplacer σ_2 par σ dans la loi complète donc finalement à compléter l'évolution squelette par la convolution de son taux. Si, par exemple, on prend : $A_g \ll 1$ et $\overset{\infty}{\gamma}_4 = 0$ on est conduit au schéma : $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_2 + \int_b^X \varphi(X-x)\,d\bar{\sigma}_2(x)$ où $\bar{\sigma}_2$ est déterminé par la donnée de $\mathcal{D}$. La Fig. 6a interprète se schéma. La Fig. 6b correspond au cas du squelette reversible de la partie isotrope de l'éq. (32).

6. Illustrations unidimensionnelles des effets d'écrouissage en déformation

6.1. Au moyen de l'approximation envisagée ci-dessus on examine d'abord le schéma unidimensionnel associé à la partie isotrope de l'éq. (32). On convient de prendre A_g constant tel que : $A_g \ll 1$. Une dernière simplification est apportée en considérant que : dx_1/dt dans l'éq. (33) est constant. Cela revient seulement à accentuer l'effet de mémoire près d'une inversion de signe de E_1 . Le schéma est alors de la forme :

$$S_1 = S_{21} + \int_b^X \frac{\varphi(0)}{1-\varepsilon_g}\left[\exp\left(-\frac{X-x}{m_g}\right)-\varepsilon_g\right]dS_{21}(x) \tag{34}$$

avec S_{21} déterminé par : $\dot{S}_{21} = (3\alpha_0+\alpha_1)E_1$, dès lors que l'histoire de E_1 est donnée. Les Fig. 7a et 7b concernent deux genres d'évolution cyclique avec effet de mémoire à longue portée et forte intensité. L'évolution de la Fig. 7b est étudiée avec une intensité moyenne de la mémoire (cf. Fig. 7c). Les Fig. 7d et 7e concernent les cas de mémoire à courte portée et intensités forte ou moyenne.

6.2. Un écrouissage transitoire, analogue à celui envisagé en 6.1, est à présent étudié au sujet de la partie déviatoire de l'éq. (32). Toujours avec : $A_g \ll 1$ constant et : $\overset{\infty}{\gamma}_4 = 0$ on a d'abord :

$$\dot{\sigma}_2 = \alpha_1\mathcal{D} + \alpha_4(\sigma_2-\sigma_{2R})^2\mathcal{D}$$

Pour une surface G de Mises l'expression de α_4 donnée au § 5.3 conduit au schéma de Prager :

$$\dot{\sigma}_2 = \alpha_1\left[1-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_2}{\omega Y_0}\right)^2\right]\mathcal{D}$$

où Y_0 est le seuil de plasticité et où ω et σ_R sont définis comme en 3. Si : $Z_0 = Y_0/\alpha_1$ note la déformation caractéristique on prend encore, à la place de (33) et comme en 6.1, la définition simple : $dx = \mathcal{D}dt/Z_0$. Une fois déterminé σ_a on obtient σ par la même forme de sommation que celle utilisée pour S_1 (cf. éq. (34)). Les évolutions de la figure 5 sont à nouveau envisagées. Dans le cas d'effet de mémoire à longue portée $(m_g > 1)$ et à forte intensité on obtient les évolutions des Fig. 8a à 8d. Si la mémoire est encore intense mais à courte portée, l'effet de pic est accentué. A l'évolution cyclique centrée de la Fig. 8c correspond alors celle de la Fig. 8e. L'accomodation des cycles est évidemment plus rapide et les propriétés stationnaires cycliques très différentes de celle du squelette. En revanche il est clair que sous déformation monotone croissante les propriétés stationnaires sont celles du squelette (cf. Fig. 8e par exemple). Ceci provient évidemment de l'absence des termes d'écrouissage permanent (ou consolidation).

6.3. On examine à nouveau un schéma unidimensionnel de la partie déviatoire de l'éq. (32). Mais à présent on pose : $\varphi(0) = 0$ de sorte que le schéma devient :

$$(1 - A_g)\dot{\sigma} = \alpha_1 \mathcal{D} + \alpha_4 [1 - A_g \overset{\infty}{\gamma} \bar{\gamma}(\eta)](\sigma - \sigma_R)^2 \mathcal{D}$$

On utilise, comme en 6.2, le schéma de Prager pour définir l'évolution squelette associée. On a donc :

$$\dot{\sigma} = \alpha_{1e}\left[1 - \left(\frac{\sigma - \sigma_R}{\omega Y_e}\right)^2\right]\mathcal{D} \tag{35}$$

avec : $\alpha_{1e} = \alpha_1/[1 - A_g(\eta)]$; $Y_e = Y_0/\sqrt{1 - A_g(\eta)\overset{\infty}{\gamma}_4 \bar{\gamma}(\eta)}$

sous réserve que : $\lim\limits_{\eta \to \infty} A_g \overset{\infty}{\gamma}_4 < 1$; $\lim\limits_{\eta \to \infty} A_g < 1$

L'écrouissage est ici du genre isotrope, entre Y_0 et :

$$\lim_{\eta \to \infty} Y_e(\eta) = Y_0/\sqrt{1 - A_g(\infty)\overset{\infty}{\gamma}_4} \tag{36}$$

Les résultats expérimentaux indiquent que Y_e tend vers sa limite de façon approximativement exponentielle [25] . On peut donc envisager de prendre A_g constant (pente constante après inversion) et :

$$\bar{\gamma}_4 = 1 - \exp(-\eta/n\eta_0) \; ; \; \eta_0 = \frac{1}{2} Y_0 Z_0 = \frac{1}{2}\alpha_1 Z_0^2 \tag{37}$$

L'accomodation de cycles d'amplitude de l'ordre de Z_0 est alors effectuée après un "trajet d'écrouissage" tel que le nombre de cycles soit de l'ordre de la partie entière de n. La première charge présente un effet d'écrouissage. Si les cycles sont d'amplitude petite relativement à Z_0 et toujours sous réserve de la constance de A_g , l'effet de consolidation devient négligeable sous sollicitation oligocyclique. On note que l'éq. (35) n'est plus explicitement intégrodifférentielle. On peut intégrer pas à pas l'éq. (35) et l'éq. (22) donnant η . Pour : n de l'ordre de 10 on obtient l'évolution de la figure 9a. Cette évolution est analogue au résultat expérimental de (25). Sur la Fig. 9b les évolutions sont cycliques non simples.

Les éq. (35) et (36) conduisent à remarquer que l'effet de consolidation peut être analysé même si les résultats expérimentaux ne permettent pas d'introduire de façon précise les notions habituelles de plasticité. On a vu que celles-ci ne sont introduites qu'au niveau de la définition de l'évolution squelette, fictive, représentative des grandes lignes des propriétés stationnaires. De plus cette introduction de la notion de plasticité est faite préalablement à tout effet d'écrouissage capable de la masquer ultérieurement.

6.4. A température relative élevée et pour $\mathcal{D}$ assez grand, la loi constitutive doit comporter les termes d'écrouissage en $\mathcal{D}$. Ce point, étudié en [7] , n'est pas détaillé ici. On se borne à rappeler quelques résultats illustratifs en traction simple à $\mathcal{D}$ constant (cf. Fig. 10a) sollicitation cyclique (cf. Fig. 10b) et en fluage (cf. Fig. 10c).

7. Simulation numérique pour une structure écrouissable par consolidation

7.1. La contribution σ_g étant une perturbation de σ_a il est possible d'employer une loi telle que (32) dans un code adapté à la prise en compte de σ_a seulement. Pour obtenir un tel code il faut compléter un algorithme permettant d'analyser une première charge élasto-plastique [26] en lui ajoutant celui déterminant ω et les états de référence σ_R. On peut alors obtenir, par exemple, des évolutions de traction simple telles que celle de la Fig. 11a.

7.2. L'identification d'une loi, tensorielle, telle que (35) est basée sur des résultats d'expériences sous sollicitations cycliques. Si l'on se borne à identifier sur la première charge seulement on peut employer un schéma, également tensoriel, du genre de Prager, avec écrouissage isotrope (cf. Fig. 11b au sujet d'un acier inoxydable).

7.3. A l'aide de cette identification approximative on peut envisager de simuler des structures mettant en jeu des états de contraintes assez simples. L'exemple considéré ici est celui d'une coque axisymétrique sollicitée sous pression interne P . La cuve sphérotorique est schématisée sur la Fig. 11c qui donne P en fonction du déplacement U_A du point sur l'axe. Les paramètres de Lamé et ceux de la géomètrie sont ceux de [27] ($L = D = 10$ IN, $r = 0.06D$, $h = 0.004D$, $E = 3 10^7$ PSI). La première charge indiquée sur la Fig. 11c est celle de [27].

REFERENCES

[1] PETKOVIC R.A., Ph. D. Thesis, Mc Gill University, Montreal, Canada, 1974.

[2] LUTON M.J. et JONAS J.J., Can. Met. Q, 11, 79-90, 1972.

[3] LANIER J., Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, IV-2, 53-60, 1976.

[4] WACK B., Thèse, Grenoble, 1968.

[5] GUELIN P., TERRIEZ J.M., WACK B., Mech. Res. Comm. Vol. 3, 325-330, 1976.

[6] PIERRARD J.M., Thèse, Grenoble, part B, 1971.

[7] GUELIN P., STUTZ P., Arch. Mech. Stos. Vol. 29/1, 13-24, 1977 - Euromech 54, 1974.

[8] BOURCIER DE CARBON C., C.R. Acad. Sc., 215, 241-244, 1942.

[9] NAYROLES B., Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, I/1, 21-24, 1965.

[0] PERSOZ B., Rheologica Acta, I, 2/3, 90-96, 1958 et la Rhéologie, Masson, Paris, 1969.

[11] JHANSALE H.R., Trans. 3rd SMIRT L 5/4, 1975.

[12] VOGEL T., Théorie des Systèmes Evolutifs (Chap. IV), Gauthier Villars, Paris, 1965.

[13] MROZ Z. et LIND N.C., Acta Mech, 22, 131-152, 1975.

[14] KREMPL E., Acta Mech., 22, 53-90, 1975.

[15] VALANIS K.C., Arch. Mech., 23, 517-551, 1971.

[16] BRIDGMAN P.W., Rew. of Modern. Phys., 22, 1, 65-63, 1950.

[17] TAYLOR G.I. et FARREN W.S., Proc. Roy. Soc., A 107, 1925.

[18] DILLON O.W.Jr., J. Mech. Phys. Solids, 10, 235-244, 1962.

[19] GLANSDORFF P., PRIGOGINE I., Physica 46, 344-366, 1970.

[20] MEIXNER J., Physica, 59, 305-313, 1972.

[21] ANGLES D'AURIAC P., Physica, 59, 305-313, 1972.

[22] SAWCZUK A. et STUTZ P., Z. Angew. Math. Phys. 19, 770-778, 1968.

[23] STUTZ P., Sciences et Techniques de l'Armement, 2, 1973.

[24] GUELIN P. et STUTZ P., Problèmes de la Rhéologie, Série de Mécanique Appliquée, Editions Scientifiques Polonaises, 177-184, 1977.

[25] PETREQUIN P., MOTTOT M., RABBE P., AMZALLAG C., MALIBUS L., GRATTIER G., Conf. on Low cycle fatigue, Paris, 1976.

[26] BOISSERIE J.M., LE BOURG P., BARRAU P., LIDA M., Trans. 3rd SMIRT, E 3/2, 1975.

[27] KHOJASTEH-BAKHT M., POPOV E.P., J. of the Eng. Div. ASCE, Vol. 96, n° EM3, 327-340, 1970.

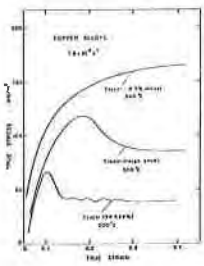

Fig. 1a

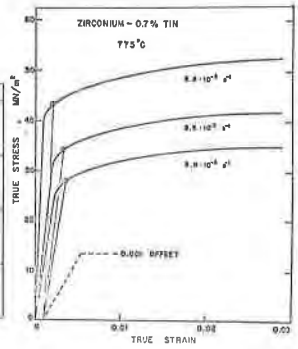

Fig. 1b

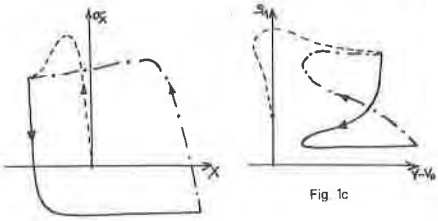

Fig. 1c

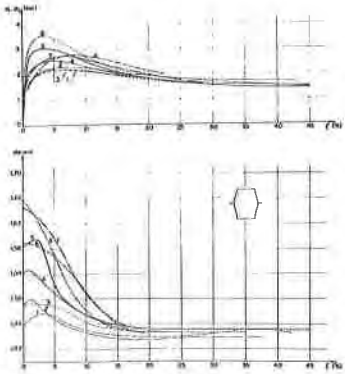

Fig. 1d

Figure 1a : Typical flow curves for copper alloys at 500° C (pure copper, 0.05 % O copper, Cu - 9.5 % Ni).

Figure 1b : Typical stress-strain curves for Zr - 0.7 % Sn alloy at 775° C.

Figure 1c : Deviatoric and isotropic typical stress-strain curves of law cycle fatigue for a dry sand (notations V and X are for volume and boundary positions of the Triaxial box).

Figure 1d : Typical biaxial test ($\sigma_2 = \sigma_3 = 1$ bar) on dry sand : deviatoric stress and density limits are independant of the initial state.

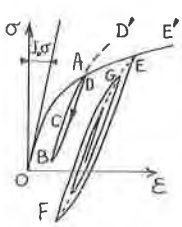

Fig. 2a

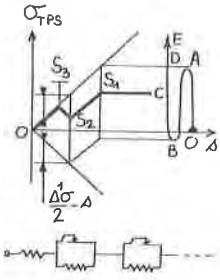

Fig. 2b

Figure 2a : Typical hysteresis loops.

Figure 2b : Nayroles state diagram for series-parallel model (σ_{TPS} is the actual stress in the friction slider element of yield stress Δ).

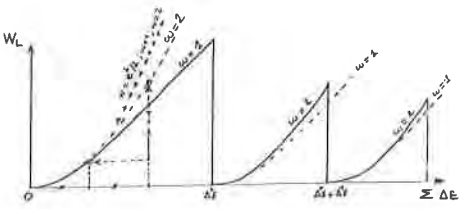

Figure 3 : Piecewise continuous variation of the "help" function W in a simple cyclic evolution.

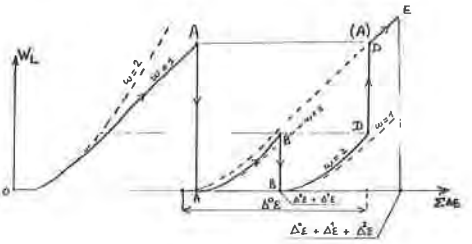

Figure 4 : Piecewise continuous variation of the "help" function W in a non-simple cycli evolution.

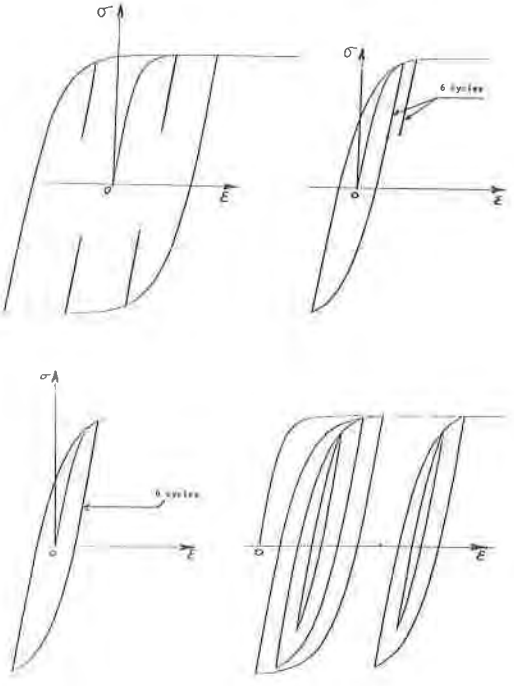

Figure 5 : Typical stress-strain hysteresis loops in the "pure hysteresis" case ($\sigma = \sigma_2$).

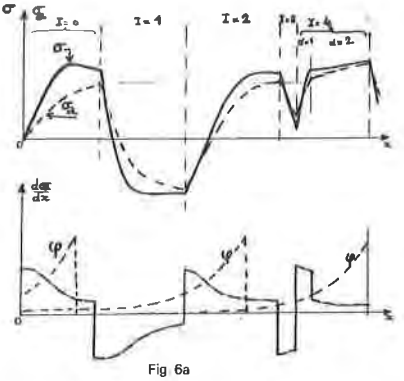

Fig 6a

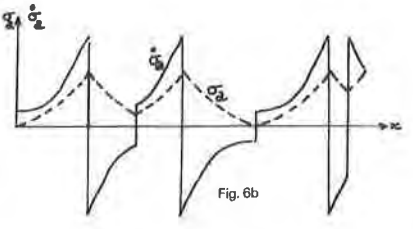

Fig. 6b

Figure 6a : Graphical interpretation of the method allowing to obtain a first approximation of the constitutive law properties : pure hysteresis for σ_2 definition.
Figure 6b : Purely elastic case for σ_2 definition. .

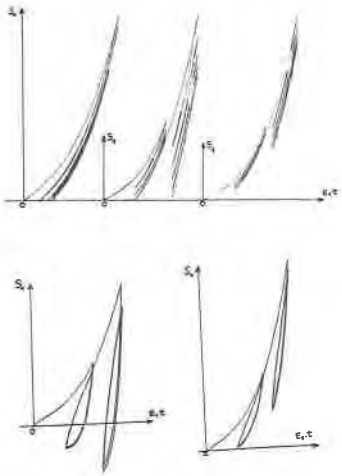

Figure 7 : Typical stress-strain curves given by the isotropic part of the constitutive law.

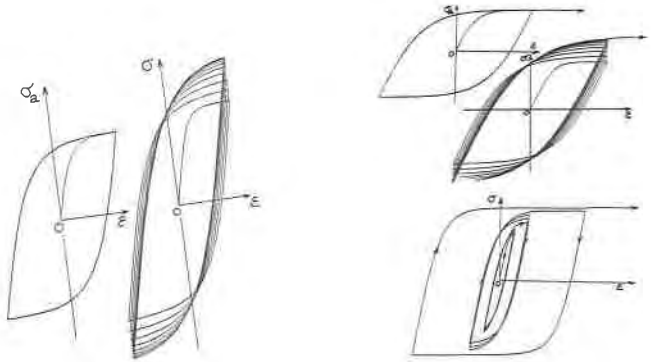

Figure 9 : Typical stress-strain curve in the case : $\varphi = 0$, $Ag \neq 0$, $\gamma_4 \neq 0$. Simple and non-simple loops on a) and b).

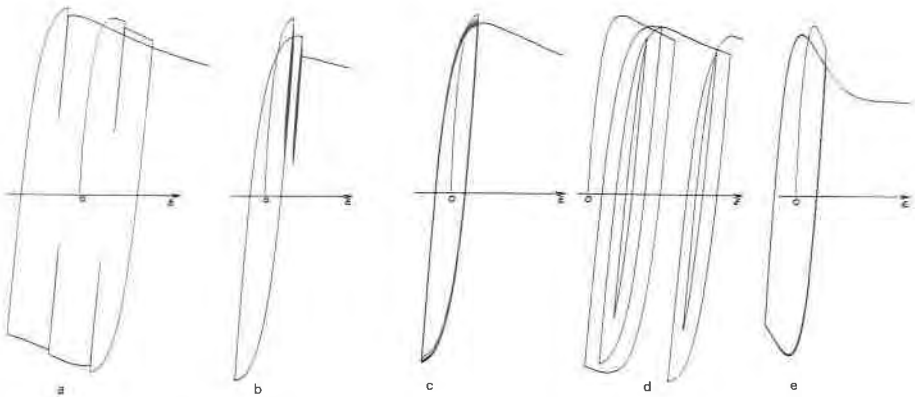

Figure 8 : Typical stress-strain curves given by the deviatoric part of the constitutive law (for Fig. 8a, b, c, d, the σ_a terms are those of Fig. 5a, b, c, d).

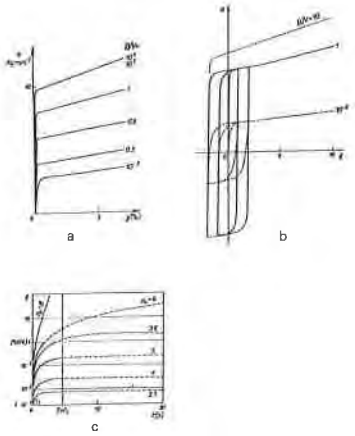

Figure 10a : Strain-rate hardening for monotonic strain case (Ref. [7]).
Figure 10b : Strain-rate hardening for cyclic strain case (Ref. [7]).
Figure 10c : Typical creep curves given by constitutive law of [7] .

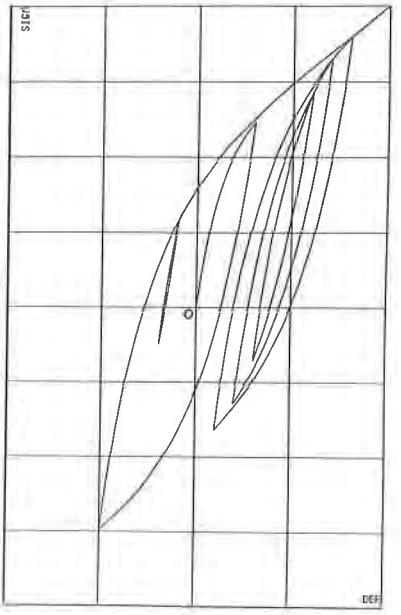

Figure 11a : Typical stress-strain hysteresis loops calculated in the simple traction case with Ref. [26] finite element code.

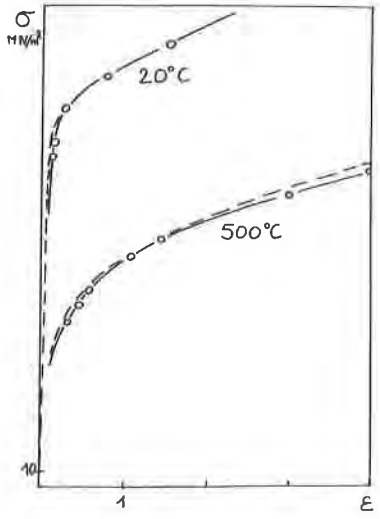

Figure 11b : Experimental and calculated stress-strain curves for a stainless steel.

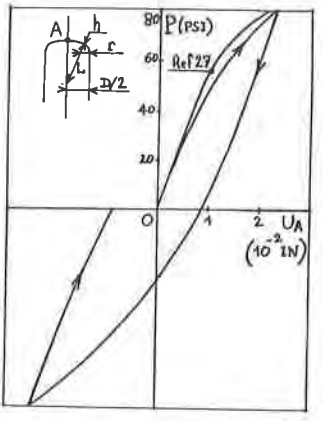

Figure 11c : Internal pressure P versus apex displacement U_A for a stainless steel spherotoroïdal shell.