

**THEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER
SPEZIELLE VERBUNDKÖRPERMODELLE IM HINBLICK
AUF DAS BESTRAHLUNGSVERHALTEN VON „BONDINGS“
UND „COMPACTS“ BESCHICHTETER KERNBRENNSTOFFPARTIKEL**

K. DRITTLER*,

Institut für Reaktorwerkstoffe, Kernforschungsanlage Jülich, Jülich, Germany

Abstract

In all high temperature reactors planned, built or under operation fuel particles are used. In order to prevent the escape of fission products these particles are coated with different layers of pyrolytic carbon or silicon carbide. Due to various reasons, mainly due to safety aspects these coated particles (having a diameter in the range of 0.4 to 1 millimeter) are compacted. Under irradiation the particles and the matrix material generally have different length changes which cause internal stresses. During normal operation time of power reactors these stresses can raise to an extent that the compact is destroyed.

In order to get informations what properties of coated particles and matrix material has to be changed that these internal stresses are reduced to the lowest possible value the internal stresses of compact models with spherical particles were calculated by analytical methods. It was assumed that the absolute value of the differences of the elastic properties of particles and matrix is not to large compared to that of the absolute values of the properties themselves. The evaluation of the derived formulae was done numerically.

The results show that regarding the stresses there is only a weak influence of the geometrical dimensions and parameters. In order to estimate at what conditions a compact is destroyed by excessive internal stresses, the following formula can be derived:

$$\Delta\eta_{kr} = c \left(\frac{1}{E_m} + \frac{2}{E_e} \right) \sigma_{zm}$$

where $\Delta\eta_{kr}$ is the "critical" difference of the irradiation induced relative length changes of particles and matrix at which the compact is destroyed. E_e respectively E_m is the (average) Young's Modulus of particles and matrix material respectively and σ_{zm} is the tensile rupture stress of the matrix material. For homogeneous matrix material c has the values 3.8; if there are pores in the matrix c can be diminished to 1.9. From this equation it follows, for instance, that improvement of the irradiation behaviour, that is a higher value of $\Delta\eta_{kr}$, can be obtained by making E_e as small as possible compared to E_m .

Besides other results the formalism can be used in order to calculate the irradiation behaviour of some sorts of graphite (Gilonite Graphite).

* at present: Institut für Reaktorsicherheit der TÜV, Köln, Germany

1. Einleitung

In allen bisher gebauten oder geplanten Hochtemperaturreaktoren wird der Kernbrennstoff in Form von beschichteten Partikeln eingesetzt. Aus verschiedenen Gründen erweist es sich als zweckmäßig, die beschichteten Teilchen in ein Material einzubetten (gebundene Schüttungen) und den so entstandenen Verbundkörper als Ganzes in das Brennelement einzubringen oder die Einbettung gleich im entsprechenden Brennelementteil vorzunehmen. Die Einbettung kann auf unterschiedliche Weise geschehen. Für die verschiedenen Verfahren sind Bezeichnungen wie "Compact", "Bonding" oder "loose Bonding" usw. üblich (vgl. E.H. Voice et al. usw. [1]).

Häufig ergeben sich jedoch bei Partikeln in solchen gebundenen Schüttungen Zerstörungen der Beschichtung schon bei solchen Dosen schneller Neutronen, die bei losen Schüttungen bei weitem nicht zu irgendwelchen Defekten ausgereicht hätten. Außerdem tritt in der Einbettmasse sehr oft eine Vielzahl von Rissen auf, die den Vorteil der gebundenen Schüttungen gegenüber den losen wieder zunichte machen (vgl. E.H. Voice et al. usw. [1]).

Eine Überwindung dieser Schwierigkeiten ist nicht nur im Hinblick auf die technologische Entwicklung von belang; vielmehr wird dadurch auch die Wirtschaftlichkeit dieser Reaktorlinie wesentlich verbessert werden, weil damit u.a. die Standzeit der Brennelemente verlängert werden kann.

Um Aufschlüsse über die Ursachen der genannten Zerstörungen zu erhalten, wird die im folgenden wiedergegebene Theorie der Verbundkörper mit kugelförmigen Einschlüssen zur Abschätzung der Spannungen in der Einbettmasse und deren Auswirkung auf die gebundenen beschichteten Teilchen herangezogen.

Zwar gilt die im folgenden dargelegte Theorie für alle Verbundwerkstoffe, die die gleichen Voraussetzungen erfüllen, doch wird der Einfachheit halber sich nur auf gebundene Schüttungen bezogen. Lediglich am Schluß dieser Arbeit wird auf Verbundkörper anderer Art eingegangen (Gilonitgraphit), um Vergleiche mit Experimenten zu ermöglichen.

2. Voraussetzungen und allgemeine Ergebnisse der Berechnungen

Eine genaue Berechnung der mechanischen Eigenschaften gebundener Schüttungen beschichteter Teilchen ist äußerst aufwendig und kompliziert. Aus diesem Grunde werden Näherungen und Idealisierungen verwendet, die bei beträchtlich kleinerem Aufwand dennoch die wesentlichen Eigenschaften richtig wiedergeben.

Bei den zur Diskussion stehenden Verbundkörpern werden innere Spannungen vor allem dadurch erzeugt, daß Partikeln und Einbettmasse unterschiedliche Ausdehnungen oder Schrumpfungen infolge Bestrahlungen, Temperaturänderungen usw. erleiden.

Sowohl die äußere Schicht der Partikeln als auch die Einbettmasse gehören der gleichen Stoffklasse an. In guter Näherung kann daher zunächst mit der Berechnung eines Verbundkörpers begonnen werden, bei dem Einlagerungen und Matrix die gleichen elastischen Konstanten besitzen. Das elastomechanische Verhalten solcher Verbundkörper ist gleich dem eines einheitlichen festen elastischen Körpers, dessen Längenänderungen sich an den Grenzen zwischen den Einlagerungen und der Matrix ändern können. Unter diesen Voraussetzungen werden die Berechnungen exakt sein. Der Formalismus kann jedoch so erweitert werden, daß er näherungsweise auch auf Verbundkörper angewendet werden kann, bei denen sich die Elastizitätsmoduln der Einlagerung

und der Matrix unterscheiden. Erwartungsgemäß sind die durch die Näherung begangenen Fehler um so größer, je größer der Betrag der Differenz der Elastizitätsmoduln von Einlagerung und Matrix ist. Die Ableitung der Formeln für kugelförmige Einlagerungen ist in Anhang 1 wiedergegeben. Für die Spannungen in der Matrix im Punkt mit den Koordinaten x, y, z folgt dann

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E_m}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_i \Delta b_i \cdot r_{oi}^3 \cdot \left((1+\nu) \frac{1}{r_i^3} - 3(1-\nu) \frac{(x-x_i)^2}{r_i^5} - 3\nu \frac{(y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}{r_i^5} \right) + \sigma_{Pxx} \\
 &= F(x, y, z) \\
 \sigma_{yy} &= F(y, z, x) \\
 \sigma_{zz} &= F(z, x, y) \\
 \sigma_{xy} &= \frac{-3E_m}{(1+\nu)} \sum_i \Delta b_i \cdot r_{oi}^3 \frac{(x-x_i)(y-y_i)}{r_i^5} + \sigma_{Pxy} \\
 &= G(x, y, z) \\
 \sigma_{yz} &= G(y, z, x) \\
 \sigma_{zx} &= G(z, x, y)
 \end{aligned} \right\} (1)$$

mit $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$

Mit x_i, y_i, z_i werden die Koordinaten des Mittelpunktes der i -ten Einlagerung bezeichnet. Der Radius der i -ten Einlagerung in der Matrix ist r_{oi} . Die Querkontraktionskonstanten für Einlagerungen und Matrix sind als gleich angenommen worden; für sie wird das Formelzeichen ν verwendet. Der Elastizitätsmodul der Matrix ist E_m . Wird mit E_{ei} der Elastizitätsmodul der i -ten Einlagerung bezeichnet, so folgt aus Anhang 1

$$\Delta b_i = \frac{\eta_{ei} - \eta_m}{1 + 2E_m/E_{ei}} \quad (2)$$

Dabei sind η_{ei} bzw. η_m die relativen Längenänderungen der i -ten Einlagerung bzw. der Matrix, die sich aus der strahleninduzierten Dimensionsänderung, der thermischen Ausdehnung, dem Kriechen und dergleichen zusammensetzen.

Die hier verwendete Elastizitätstheorie ist invariant gegenüber linearen Beziehungen bezüglich der Ortskoordinaten. Aus diesem Grunde gehen in die Formeln für die Spannungen, die in Gl. (1) wiedergegeben werden, nicht die absoluten geometrischen Maße sondern nur deren Verhältnisse zueinander ein. Es werden daher zur Reduzierung des Rechenaufwandes folgende Größen in Gl. (1) eingeführt

$$r_i^* = r_i/r_{oi} \quad x_i^* = x/r_{oi} \quad \text{usw.} \quad x_i^* = x_i/r_{oi} \quad \text{usw.} \quad (3)$$

Die Formeln (1) und (2) gelten für homogene Einlagerungen. Für Einlagerungen mit einer Struktur in den elastomechanischen Eigenschaften müssen entsprechende Mittelwerte verwendet werden.

Die Größen $\bar{\sigma}_{Pxx}$ usw. und $\bar{\sigma}_{Pxy}$ usw. in Gl. (1) bezeichnen die Anteile der Spannungskomponenten, die auf Poren und Hohlräume zurückzuführen sind. Im allgemeinen ist jedoch eine exakte Erfassung dieser Einflüsse wegen der großen Kompliziertheit der Poren- bzw. Hohlraumssysteme nicht möglich. Sind aber wie fast immer bei gebundenen Schüttungen beschichteter Partikeln nur Poren und Hohlräume vorhanden, deren Linearausdehnung klein gegenüber denen der Einlagerungen sind, so kann in guter Näherung folgendermaßen verfahren werden: Im ersten Schritt wird, wie Anhang 2 zeigt, auf die Berücksichtigung von Poren und Hohlräumen verzichtet, d.h. es gilt

$$\bar{\sigma}_{Pxx} = \text{usw.} = \bar{\sigma}_{Pxy} = \text{usw.} = 0 \quad (4)$$

Erst im zweiten Schritt wird auf Poren und Hohlräume eingegangen. Die in Anhang 2 wiedergegebenen Ergebnisse gestatten eine Abschätzung der Größe des Einflusses von Poren und Hohlräumen. Dabei zeigt sich, daß nur bei ganz bestimmten Problemen eine Berücksichtigung der Poren und Hohlräume erforderlich ist.

Aus Gl. (1) ist zu entnehmen, daß die von einer einzelnen Einlagerung erzeugte Spannung sehr stark mit der Entfernung abnimmt. Daher reicht der Einfluß einer Einlagerung auf die Größe der Spannung in einem bestimmten Punkt nur vergleichsweise schwach über das Gebiet der nächsten Nachbarn hinaus. Es genügt somit, eine betrachtete Einlagerung nur mit wenigen Nachbarn zu umgeben, um in sehr guter Näherung die gleichen Verhältnisse wie bei einem ausgedehnten Verbundkörper zu bekommen. Die Ergebnisse bestätigen diese Tatsache, wie weiter unten noch dargelegt wird. Für die Poren und Hohlräume gilt ähnliches (vgl. Anhang 2).

3. Ergebnisse von Modellverbundkörpern

3.1 Berechnung der inneren Spannungen

Bei den wirklichen Verbundkörpern sind die Radien der Einlagerungen nicht alle exakt gleich; vielmehr ist mit gewissen Schwankungen um einen Mittelwert zu rechnen. Auch die Anordnung der Einlagerungen ist nicht so regelmäßig, wie das bei idealen Kugelpackungen zu erreichen ist. Zwar kann Gl. (1) unter Berücksichtigung von Gl. (4) für eine realistische Anordnung ausgewertet werden, doch ist die Auswertung der Ergebnisse äußerst umfangreich und aufwendig. Es ist daher zweckmäßiger, bei den Rechnungen von einer regelmäßigen, hochsymmetrischen Anordnung gleicher Einlagerungen auszugehen. Durch die hohe Symmetrie wird dann eine wesentliche Reduzierung der zu untersuchenden Punkte in der Matrix erreicht. Der so idealisierte Verbundkörper stellt, wie u.a. auch die Ergebnisse zeigen werden, eine gute Näherung der realen Verbundkörper dar.

Wird eine bestimmte Anzahl gleicher Einlagerungen als dichteste Kugelpackung (analog einem kubisch flächenzentrierten Kristallgitter)¹⁾ möglichst symmetrisch angeordnet, so kann Gl. (1)

1) Eine Einlagerung mit ihren nächsten Nachbarn ist in Fig. 1 schematisch dargestellt.

mit Gl. (3) und Gl. (4) geschrieben werden

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E_m}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Delta b \cdot \sum_{\substack{|i| \leq 1, \\ |k| \leq k_0, \\ |l| \leq 1, \\ i+k+l=2n, \text{ n ganze Zahl}}} (1+\nu) \frac{1}{r_i^{*3}} - 3(1-\nu) \frac{(x^* - K \cdot i)^2}{r_i^{*5}} - 3\nu \frac{(y^* - K \cdot k)^2 + (z^* - K \cdot l)^2}{r_i^{*5}} \\
 &= F(x, y, z) \\
 \sigma_{yy} &= F(y, z, x) \\
 \sigma_{zz} &= F(z, x, y) \\
 \sigma_{xy} &= \frac{-3E_m}{(1+\nu)} \Delta b \cdot \sum_{\substack{|i| \leq 1, \\ |k| \leq k_0, \\ |l| \leq 1, \\ i+k+l=2n, \text{ n ganze Zahl}}} \frac{(x^* - K \cdot i)(y^* - K \cdot k)}{r_i^{*5}} \\
 &= G(x, y, z) \\
 \sigma_{yz} &= G(y, z, x) \\
 \sigma_{zx} &= G(z, x, y)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei ist $r_i^* = \sqrt{(x^* - K \cdot i)^2 + (y^* - K \cdot k)^2 + (z^* - K \cdot l)^2}$ und $K = A/\sqrt{2}$. A ist der kleinste Abstand zweier Mittelpunkte benachbarter Einlagerungen dividiert durch den Radius der Einlagerungen r_0 . Aus Gl. (2) folgt weiter

$$\Delta b = \frac{\eta_e - \eta_m}{1 + 2E_m/E_e} \tag{6}$$

wobei η_e die relative Längenänderung und E_e der Elastizitätsmodul der Einlagerungen sind.

Die Spannungen sind proportional zu E_m und Δb ; es genügt daher, die Quotienten $\sigma_{xx}/(E_m \Delta b)$ usw. zu berechnen, um die Spannungen für beliebige Werte von E_m und Δb zu erfassen.

Wegen der regelmäßigen Anordnung der Einlagerungen braucht nur die Einlagerung in der Mitte der Anordnung und deren nächste Umgebung betrachtet werden. Außerdem ist wegen der herrschenden Symmetrie nur die Untersuchung eines Ausschnitts aus dem Modellverbundkörper erforderlich.

Für die Auswertung von Gl. (5) wurde ein Programm für eine elektronische Großrechenanlage erstellt. Die gerechneten Beispiele sind in der Tabelle aufgeführt. Es genügt im vorliegenden Falle, die einzelnen Anordnungen nur durch die Anzahl der betrachteten Einlagerungen N zu charakterisieren, da jede Anordnung sich von der anderen durch eine verschiedene Anzahl von Einlagerungen unterscheidet.

Bei der Diskussion der Ergebnisse wird zweckmäßigerweise vom Beispiel mit $N = 63$ und $A = 1,1$ ausgegangen. Die Verteilung der Spannungskomponenten σ_{xx} dividiert durch $E_m \Delta b$ auf der Oberfläche der Einlagerung in der Mitte der Anordnung zeigt Fig. 1. Um eine bessere Übersicht zu erhalten, sind von den 63 Einlagerungen nur die in der Mitte und die nächsten Nachbarn - teil-

weise durchschnitten - gezeichnet worden. Zur besseren Orientierung wurde außerdem ein Achtel der Oberfläche der mittleren Einlagerung in die Betrachtung einbezogen; die Hälfte davon hätte schon ausgereicht. Die anderen Zug- bzw. Druckkomponenten des Spannungstensors werden durch zyklische Vertauschung (wie in Gl. (5) angegeben) erhalten.

Aus allgemeinen Betrachtungen wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt abgeleitet, daß ab einer gewissen Anzahl die Zahl der Einlagerungen in der Anordnung nur einen vergleichsweise geringen Einfluß auf die Einlagerung in der Mitte und ihre Umgebung hat. Als Beispiel hierzu sind in Fig. 2 für die Koordinaten $x^* = 1, y^* = 0, z^* = 0$ und $x^* = \sqrt{2}/2, y^* = \sqrt{2}/2, z^* = 0$ und für $A = 1,1$ die Spannungskomponenten für Zug bzw. Druck in Abhängigkeit von der Anzahl der Einlagerungen in der Anordnung aufgetragen. Es ist außerdem daraus ersichtlich, daß die Anordnung mit $N = 63$ in sehr guter Näherung die gleichen Ergebnisse liefert wie ein beliebig ausgedehnter Verbundkörper. (Fälle mit weniger als 13 Einlagerungen ausgenommen; solche Anordnungen sind technisch nicht von Interesse!) Es genügt daher im weiteren die Anordnung mit $N = 63$ zu betrachten. Diese Anordnung stellt - soweit überhaupt erforderlich - wohl den besten Kompromiß bezüglich der Anzahl der Einlagerungen dar. Die Abhängigkeit der Spannungen von A , dem Abstand der Mittelpunkte benachbarter Einlagerungen dividiert durch den Radius der Einlagerungen, wird in Fig. 3 anhand von Beispielen gezeigt. Die Punkte, die für diese Beispiele genommen wurden, sind die gleichen wie im Falle der Fig. 2. Daß im Falle $A = 1,0$, d.h. bei Berührung der Einlagerungen keine vergleichsweise starke Änderung der Spannungen oder gar Singularitäten auftreten, rührt davon her, daß die Elastizitätsmoduln der Einlagerungen und der Matrix die gleiche Größenordnung haben.

Wird vom Mittelpunkt einer Einlagerung ausgehend der Spannungsverlauf auf Geraden in der Matrix ab der Oberfläche der Einlagerung betrachtet, so fallen dem Betrage nach die Spannungen bis zur Erreichung eines durch die Symmetrie der Anordnung gegebenen Scheitelpunktes ab. Das ist darauf zurückzuführen, daß die Spannungen in der Matrix sich nach Gl. (5) und allgemein nach Gl. (1) (bei Gültigkeit von Gl. (4)) als Summe von Gliedern ergeben, die vom Mittelpunkt der Einlagerungen ausgehend abfallen. Als Beispiel wird auf den Geraden, deren positive Richtung durch die Vektoren mit den Komponenten $1,0,0; 1,1,0; 1,1,1$ gegeben ist, der Verlauf der Spannungskomponenten verfolgt. Die Länge auf diesen Geraden - gemessen in der Einheit des Radius der Einlagerungen - wird mit d_x, d_{xy} und d_{xyz} bezeichnet. Fig. 4 zeigt die Spannungskomponenten $\tilde{\sigma}_{xx}, \tilde{\sigma}_{yy}, \tilde{\sigma}_{zz}$ dividiert durch $E_m \Delta b$ in Abhängigkeit von d_x, d_{xy} und d_{xyz} .

Die Auswahl der Beispiele, die in Fig. 1 bis 4 dargestellt sind, erfolgte so, daß alle charakteristischen Fälle erfaßt wurden. Da die berechneten Spannungen bei Anordnungen, die mehr als 13 Einlagerungen enthalten, fast nicht von der Anzahl der Einlagerungen und nur vergleichsweise schwach vom gegenseitigen Abstand abhängen, kann bei Abschätzungen folgendermaßen verfahren werden: bei der Untersuchung von Eigenschaften des Verbundkörpers, die sich alleine auf diese Spannungen zurückführen lassen, braucht der Einfluß der Anzahl der Einlagerungen und ihr gegenseitiger Abstand näherungsweise nicht berücksichtigt zu werden. Zweckmäßigerweise wird dabei von dem Fall mit $N = 63$ und $A = 1,1$ ausgegangen, der bezüglich A etwa in der Mitte des technisch interessierenden Bereichs liegt.

Aus den aufgeführten Ergebnissen folgt auch, daß reale Verbundkörper mit schwankendem Partikelradius und -abstand in ihrem Verhalten sich nur unwesentlich von dem der Modellverbundkörper unterscheiden.

3.2 Berechnung der gesamten relativen Längenänderung

Die gesamte relative Längenänderung des betrachteten Modellverbundkörpers ist wegen seiner Periodizität und Symmetrie gleich der gesamten relativen Längenänderung des Würfels, der durch die Beziehungen $0 \leq x^*, y^*, z^* \leq A/\sqrt{2}$ gegeben ist. Auf der Geraden, deren positive Richtung durch den Vektor mit den Komponenten 1,1,1 erfaßt wird, verschwinden die Spannungen in der Matrix (vgl. Fig. 4). Auf dieser Geraden tritt daher die Längenänderung der Matrix ohne Beeinflussung auf. Da aber auf dieser Geraden auch auf der Oberfläche der Einlagerung keine Spannung wirkt, kann auf dieser Geraden auch die Einlagerung sich ungestört ausdehnen. Die gesamte relative Längenänderung auf dieser Geraden innerhalb des Würfels kann dann als Mittelwert der relativen Längenänderungen von Einlagerung und Matrix geschrieben werden, wobei die Länge der Geradenstücke in der Einlagerung und der Matrix als Gewichte zu verwenden sind. Es folgt dann

$$\eta_g = \frac{\eta_e + \eta_m(c_1 \cdot A - 1)}{c_1 \cdot A} \quad \text{mit} \quad c_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (7)$$

Gl. (7) gilt für homogene Einlagerungen. Sind die Einlagerungen inhomogen, so sind entsprechend gebildete Mittelwerte zu nehmen.

Solange der Verbundkörper seinen Zusammenhalt behält, geht der betrachtete Würfel bei Änderung der Ausdehnungen wieder in einen Würfel über. (Im anderen Falle müßten Risse und dgl. entstehen.) Aus einfachen geometrischen Überlegungen folgt weiter, daß dann die für diesen Würfel in der Richtung 1,1,1 gewonnene und in Gl. (7) wiedergegebene relative Längenänderung für alle Richtungen gilt. Daraus ergibt sich, daß die Ausdehnung des Würfels isotrop ist. Schließlich ist darauf hinzuweisen, daß nach der am Beginn dieser Betrachtung wiedergegebenen Überlegung Gl. (7) die relative Längenänderung des gesamten Modellverbundkörpers ist.

3.3 Erfassung der Zerstörungen in Verbundkörpern infolge zu höherer innerer Spannungen

Technisch von Bedeutung ist die Bestimmung von Größen, die in unmittelbarem Zusammenhang mit Zerstörungen stehen, die in Verbundkörpern infolge zu hoher innerer Spannungen auftreten. Da genauere Betrachtungen der Ribildung und -fortpflanzung äußerst aufwendig sind, wird hier die Näherung verwendet, wonach die Bildung eines Risses dann auftritt, wenn ein bestimmter Wert der Zugspannung, die sog. Zerreißspannung σ_z , überschritten wird. Die damit erreichbare Genauigkeit ist für die vorliegenden Probleme vollkommen ausreichend.

Es ist zweckmäßig, folgende Unterscheidung zu machen:

- σ_{zm} ist die Zerreißspannung des Matrixmaterials; wird sie überschritten, dann treten Risse in der Matrix auf.
- σ_{zo} ist die Spannung, bei deren Überschreitung die Matrix von der Einlagerung abgelöst wird, d.h. zwischen der Matrix und der Einlagerung entsteht ein Riß.
- σ_{zc} ist die Spannung an der Oberfläche der Einlagerung, bei deren Überschreitung Zerstörungen oder Risse an oder in der Einlagerung auftreten.

Aufgrund der Herstellungsverfahren der hier vorzugsweise interessierenden Verbundkörper ist zu erwarten, daß in guter Näherung zumindest gebietsweise die drei Spannungen σ_{zm} , σ_{zo} und σ_{zc} als räumlich konstant betrachtet werden können. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

- 1.) $\sigma_{zm} \leq \sigma_{zo} < \sigma_{zc}$: Risse treten in der Matrix und an der Grenze zwischen Matrix und Einlagerungen auf. Auch im Falle $\sigma_{zm} < \sigma_{zo}$ treten die Risse an der Grenze zwischen Matrix und Einlagerungen auf, da hier das Maximum der Zugspannungen in der Matrix verläuft (vgl.

Abschnitt 3.2).

2.) $\bar{\sigma}_{zo} < \bar{\sigma}_{zm}$, $\bar{\sigma}_{ze}$: Risse treten nur entlang der Grenze zwischen Matrix und Einlagerung auf.

3.) $\bar{\sigma}_{ze} < \bar{\sigma}_{zo}$, $\bar{\sigma}_{zm}$: es ergeben sich nur Zerstörungen an oder in den Einlagerungen.

Fälle, bei denen zwei oder gar alle drei Zerreißspannungen gleich sind, wurden von einer Ausnahme abgesehen wegen der geringen Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens nicht aufgeführt. Kompliziertere Fälle lassen sich aus den aufgezählten einfachen zusammensetzen.

Bei realen Verbundkörpern ändern sich gelegentlich die Werte der Zerreißspannung von Gebiet zu Gebiet. Das hat u.U. zur Folge, daß im selben Verbundkörper gebietsweise unterschiedliche Erscheinungsformen der Rißbildung zutage treten.

Eines der markantesten Beispiele dafür, daß durch ein anderes Herstellungsverfahren eine andere Rißbildung erreicht werden kann, ist die Aufbringung eines "sacrificial layers" auf beschichtete Partikeln (s.E.H. Voice et al. usw. [1]). Damit wird erreicht, daß in jedem Falle gilt $\bar{\sigma}_{zo} < \bar{\sigma}_{ze}$. Das bedeutet, daß der Fall 3 vermieden und der Fall 2 (als Kompromiß) erreicht wird.

Der Verbundkörper verliert seinen Zusammenhalt und zerfällt, wenn überall die Risse so groß werden, daß die Einlagerungen fast ganz von der Matrix abgelöst sind und daß außerdem daran anschließend die Matrix bis zu den meisten der benachbarten Einlagerungen durchgerissen ist.

Für den Fall 1 und für einen Sonderfall von Fall 3 werden im folgenden Formeln abgeleitet, mit denen abgeschätzt werden kann, bei welchen Werten von Δb schwerwiegende Zerstörungen in einem Verbundkörper auftreten.

Wird Δb vom Werte 0 ausgehend dem Betrage nach immer größer, so werden die Spannungen in der Matrix dem Betrage nach ebenfalls immer größer. Schließlich wird an bestimmten Stellen der Matrix die Zerreißspannung $\bar{\sigma}_{zm}$ überschritten. Bei weiterer Erhöhung der Spannungen wird sich der entstandene Riß ausbreiten. Aus energetischen Gründen bildet sich die Riflche möglichst senkrecht zur Richtung der Zugspannung aus. Bei solchen Betrachtungen ist zu beachten, daß auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte jeweils einer Einlagerung und ihrer nächsten Nachbarn die Spannungen fast konstant sind (s. Fig. 4). Im Falle $\Delta b > 0$ werden Risse sich daher zuerst auf den Verbindungslinien der Mittelpunkte benachbarter Einlagerungen ausbilden¹⁾. Sowohl die Tatsache, daß auf dieser Linie an der Oberfläche der Einlagerungen im vorliegenden Falle die höchsten Zugspannungen auftreten, als auch der weitere Verlauf der Rißausbreitung ist am einfachsten anhand von Fig. 1 zu sehen, die näherungsweise die Verhältnisse auch für andere in Frage kommende Parameter wiedergibt (s.o.). Da die Extrema der Spannungswerte an den Oberflächen zu den Einlagerungen hin auftreten, werden sich die Risse entlang dieser Oberflächen ausbreiten. Schließlich sind die Rißflächen so groß, daß der Verbundkörper seinen Zusammenhalt verliert. Aus einfachen geometrischen Überlegungen anhand von Fig. 1 folgt, daß das etwa dann der Fall sein dürfte, wenn

$$0,2 \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot E_m \Delta b \approx 0,25 \cdot E_m \Delta b \cdot \bar{\sigma}_{zm} \quad (8)$$

Diese Beziehung gilt für alle vorkommenden Parameter näherungsweise.

Im Falle $\Delta b < 0$ beginnt die Rißbildung zuerst auf der Grenze zwischen Matrix und Einlagerungen auf den Verbindungslinien, die die Mittelpunkte der betrachteten Einlagerungen mit denen der

¹⁾Zugspannungen sind positiv.

übernächsten Nachbarn verbindet. In Fig. 1 sind das für die Einlagerung im Ursprung die Achsen des Koordinatensystems. Bei weiterer Ausbreitung der Risse werden schließlich die Verbindungslinien zu den nächsten Nachbarn erreicht. Dann breitet sich der Riß durch die Matrix bis zur nächsten Einlagerung aus und der Verbundkörper verliert seinen Zusammenhalt.

Anhand von Fig. 1 und einfachen geometrischen Überlegungen folgt, daß dieser Fall etwa dann eintreten dürfte, wenn

$$-0,2\sqrt{2} \cdot E_m(-\Delta b) \approx -0,28 \cdot E_m(-\Delta b) \cdot \tilde{\sigma}_{zm} \quad (9)$$

Diese Beziehung gilt ebenfalls für alle vorkommenden Parameter näherungsweise.

Der kleinste Wert von $|\Delta b|$, bei dem der Verbundkörper seinen Zusammenhalt verliert, ist nach Gl. (8) und (9) ungefähr gleich. Für diesen Wert, der mit Δb_{kr} bezeichnet werden soll, folgt dann

$$\Delta b_{kr} = c \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{zm}}{E_m} \quad \text{mit } c \approx 3,8 \quad (10)$$

Bestehen die Einlagerungen aus beschichteten Partikeln, deren Aufbau sich in das Schema "Kern-Pufferschicht-äußere hochdichte Schicht" einordnen läßt, so kann eine Beziehung zwischen der oben eingeführten, zur Zerstörung der Partikel notwendigen Zerreißspannung $\tilde{\sigma}_{ze}$ und der Zerreißspannung der äußeren hochdichten Partikelschicht $\tilde{\sigma}_{zs}$ angegeben werden. In diesem Falle kann nämlich die mechanische Wirksamkeit der Pufferschicht in guter Näherung vernachlässigt und das Verhalten der äußeren Schicht durch die Theorie der dünnen Schalen beschrieben werden (s. W.Delle et al. [5]). Die äußere Schicht wird dabei als Hohlkugel angenommen. Damit folgt dann, wenn a und b die Radien der Oberflächen innen und außen sind,

$$\frac{2(b-a)}{a+b} \cdot (\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) = \tilde{\sigma}_\perp \quad (11)$$

Dabei bezeichnet $\tilde{\sigma}_\perp$ die Spannung, die in einem Punkt auf der Oberfläche des Partikels senkrecht zur Oberfläche wirkt. $\tilde{\sigma}_1$ und $\tilde{\sigma}_2$ sind die Mittelwerte von tangentialen Spannungen über die Dicke der äußeren Schicht. Die Richtungen, in denen beide Spannungen wirken, sind zueinander senkrecht.

Wird (11) auf die zur Diskussion stehenden Zerreißspannungen angewendet, so spielen offenbar nur die Punkte eine Rolle, bei denen maximale Zugspannungen senkrecht zur Partikeloberfläche auftreten. Beim vorliegenden Modellverbundkörper sind das die Punkte mit den Koordinaten 1, 0, 0 und 0, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$ usw. (vgl. Fig. 1). Bezüglich der Koordinatenachsen und ihrer Winkelhalbierenden sind jedoch die physikalischen Eigenschaften näherungsweise rotationssymmetrisch. Mit Gl. (11) folgt daraus

$$\tilde{\sigma}_{ze} \approx \frac{4(b-a)}{a+b} \tilde{\sigma}_{zs} \quad (12)$$

4. Anwendungen

Gl. (10) gestattet die Abschätzung von Δb_{kr} , d.h. den Wert von $|\Delta b|$, bei dem der Verbundkörper infolge zu hoher innerer Spannungen zerfällt. Bei Anwendungen interessiert jedoch vor allem die Dosis \mathcal{J}_{kr}^* , bei der Verbundkörper schwerwiegende Zerstörungen erleiden. Sind die relativen Längenänderungen von Einlagerungen und Matrix proportional zur Dosis, gilt somit

$$\eta_e = p_e \quad \text{und} \quad \eta_m = p_m, \quad (13)$$

so folgt aus Gl. (10) unter Verwendung von Gl. (6)

$$\chi_{kr} = c \cdot \frac{(1 + 2E_m/E_e) \cdot \sigma_{zm}}{|p_e - p_m| E_m} \quad (14)$$

Sind Poren und Hohlräume vorhanden, so werden nach Anhang 2 unter ungünstigen Umständen die Werte der inneren Spannungen etwa verdoppelt, und es ergibt sich für die Konstante c unter Berücksichtigung von Gl. (10)

$$c_{\min} \leq c \leq c_{\max} \quad \text{wobei } c_{\min} \approx 1,9 \quad \text{und } c_{\max} \approx 3,8 \quad (15)$$

Trifft Gl. (13) nicht zu, so wird der Bereich, in dem χ_{kr} nach dieser Abschätzung liegt, am besten graphisch in einem Diagramm bestimmt, bei dem Δb in Abhängigkeit von der Dosis aufgetragen ist. Es gilt offenbar $\Delta b = 0$ für $\chi = 0$. Wird von diesen Werten ausgehend schließlich $|\Delta b|$ den Bereich von Δb_{kr} nach Gl. (10) und der Erweiterung (15) erreichen, so ist das dazugehörige Dosisintervall der zu bestimmende Bereich um χ_{kr} .

Sind Kriecheffekte zu vernachlässigen, so können die relativen Längenänderungen von Einlagerungen und Matrix, η_e und η_m , bzw. die Proportionalitätskonstanten in Gl. (13), p_e und p_m , aus gesonderten Bestrahlungen von freien Einlagerungen und bloßem Matrixmaterial bestimmt werden. Als Anwendungsbeispiel hierfür ist der Bestrahlungstest eines Verbundkörpers mit beschichteten Partikeln (Bonded Coated Particles) geeignet (s. J.H. Coobs et al. [6]). Hier traten beim Zerfall der Verbundkörper infolge Bestrahlung nur in wenigen Fällen Zerstörungen an Partikeln auf. Das Matrixmaterial ohne Partikeln hatte bei einer Bestrahlung mit einer Dosis von $5,7 \cdot 10^{21}$ nvt ($E_n > 0,1$ MeV)¹⁾ eine Volumenabnahme von 27 %. Wird angenommen, daß Gl. (13) gilt, so folgt

$$p_m \approx -1,6 \cdot 10^{-23} \quad 1/\text{nvt} \quad (E_n > 0,1 \text{ MeV}) \quad (16)$$

Änderungen der Partikelradien bei Bestrahlung loser Partikeln wurden nicht angegeben. Bei freien, ähnlichen beschichteten Teilchen ergab sich bei ungefähr gleicher Dosis eine Abnahme der Radien um rund 4 % (s. J. Baier [7]). Hieraus folgt

$$p_e \approx -0,8 \cdot 10^{-23} \quad 1/\text{nvt} \quad (E_n > 0,1 \text{ MeV}) \quad (17)$$

Da p_e nur etwa halb so groß wie p_m ist, genügt diese grobe Abschätzung. Der erforderliche Mittelwert des Elastizitätsmoduls der Partikeln kann ungefähr gleich dem der äußeren Schicht gesetzt werden, da bei Beanspruchung von außen der Einfluß der äußeren Schicht wesentlich überwiegen wird. Es kann dann gesetzt werden (vgl. W. Delle et al. usw. [8])

$$E_e \approx 1500 \text{ kp/mm}^2 \quad (18)$$

Da keine Bestimmung des Elastizitätsmoduls der Matrix bekannt geworden ist, muß man sich an den entsprechenden Werten für Graphit, besonders an denjenigen des sog. A3-Graphits, orientieren (W. Delle [9]), da das Matrixmaterial dem Graphit wohl von allen anderen Materialien am ähnlichsten ist. Mit großer Wahrscheinlichkeit liegt der Elastizitätsmodul des Matrixmaterials etwas unter dem Durchschnittswert für Graphit, da das Matrixmaterial im Vergleich zum Graphit einen höheren Binderanteil hat und der Elastizitätsmodul des Binders unter dem des Korns liegt. Daher wird angenommen

$$E_m \approx 1000 \text{ kp/mm}^2 \quad (19)$$

In analoger Weise muß mit der Zerreißspannung der Matrix verfahren werden. Da jedoch die Zerreißspannung des reinen Bindermaterials höher als die des Korns ist, wird man die Zerreißspannung des Matrixmaterials höher als den Durchschnittswert für Graphit ansetzen (W. Delle

¹⁾ E_n bezeichnet die kinetische Energie der Neutronen

$$[9]) \quad \sigma_{zm} \approx 4,0 \text{ kp/mm}^2 \quad (20)$$

In einigen Fällen des zur Diskussion stehenden Bestrahlungsversuches waren auch die äußeren Schichten der Partikeln zerrissen worden. Nach Gl. (12) kann die Spannung abgeschätzt werden, die zu solchen Zerstörungen erforderlich ist. Ist die Zerreißspannungen der äußeren Schicht $\sigma_{zs} \approx 10 \text{ kp/mm}^2$ (W.Delle et al [5]) und wird berücksichtigt, daß $a/b \approx 4/5$, so folgt aus Gl. (12)

$$\sigma_{ze} \approx 4,4 \text{ kp/mm}^2 \quad (21)$$

Die Übereinstimmung von Gl. (20) und (21) ist recht gut, d.h. die Annahme von σ_{zm} in Gl.(20) ist begründet.

Die thermischen Ausdehnungen sind im Vergleich zu den strahleninduzierten Dimensionsänderungen so klein, daß sie vernachlässigt werden können. Es folgt dann aus Gl. (16) bis (20)

$$\gamma_{kr \min} \leq \gamma_{kr} \leq \gamma_{kr \max}, \text{ wobei} \quad (22)$$

$$\gamma_{kr \min} \approx 2,2 \cdot 10^{21} \text{ nvt (En} > 0,1 \text{ MeV)} \text{ und } \gamma_{kr \max} \approx 4,4 \cdot 10^{21} \text{ nvt (En} > 0,1 \text{ MeV)}$$

Beidem Bestrahlungstest wurden bei einer Dosis von $5,5 \cdot 10^{21} \text{ nvt (En} > 0,1 \text{ MeV)}$ und bei einer Temperatur von $800 \text{ }^\circ\text{C}$ bzw. $6,6 \cdot 10^{21} \text{ nvt (En} > 0,1 \text{ MeV)}$ und $1100 \text{ }^\circ\text{C}$ der Beginn des Zerfalls bzw. der Zerfall der Verbundkörperproben festgestellt (J.H. Coobs et al. [6]). Die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Rechnung und der Experimente ist in Anbetracht der verwendeten Näherungen recht gut. Dabei ist zu bedenken, daß Kriechvorgänge nicht berücksichtigt wurden. Da solche Vorgänge Spannungen abbauen, erhöht sich die kritische Dosis γ_{kr} .

Die Größenordnung der Kriecheffekte läßt sich leicht abschätzen. Wegen der vorhandenen und angenommenen linearen Beziehungen ist der Mittelwert der Spannungen in einer bestimmten Stelle bis zum Reißen $\sigma_{zm}/2$. Kriechkonstanten des Matrixmaterials sind nicht bekannt geworden; hierfür wird die Konstante des sog. A3-Graphits genommen (R. Blackstone et al. [10])¹⁾ So ergibt sich für die Kriechkonstante der Matrix ungefähr ein Wert von $1,5 \cdot 10^{-24} \text{ mm}^2/(\text{kp} \cdot \text{nvt})$ ($\text{En} > 0,1 \text{ MeV}$). Für den Pyrokohlenstoff der äußeren Hülle der Partikeln ist als Kriechkonstante in tangentialer Richtung $4 \cdot 10^{-24} \text{ mm}^2/(\text{kp} \cdot \text{nvt})$ ($\text{En} > 0,1 \text{ MeV}$) anzusetzen (J.C. Bokros et al. [11]). Der Pyrokohlenstoff selbst zeigt in radialer Richtung nur so schwache Kriecheffekte, daß sie gegenüber denen in tangentialer Richtung vernachlässigt werden können. Daher braucht nur die radiale Auswirkung des Kriechens in tangentialer Richtung berücksichtigt zu werden. Die Kriechdehnungen sind näherungsweise das Produkt aus der mittleren wirksamen Spannung, der Kriechkonstanten, der Dosis und gegebenenfalls eines Faktors, der durch die Geometrie bedingt ist. Für die mittlere Dosis von $6 \cdot 10^{21} \text{ nvt (En} > 0,1 \text{ MeV)}$ ergeben sich dann für die Matrix bzw. für die Partikeln in radialer Richtung die Kriechdehnungen zu 0,018 bzw. 0,009. Die Vorzeichen sind so zu wählen, daß die Spannungen, d.h. im vorliegenden Falle $|p_e - p_m|$, vermindert wird. Die Rechnungen ergeben dann anstelle von (22)

$$\begin{aligned} \gamma_{kr \min} &\approx 5,0 \cdot 10^{21} \text{ nvt (En} > 0,1 \text{ MeV)} \\ \gamma_{kr \max} &\approx 10,0 \cdot 10^{21} \text{ nvt (En} > 0,1 \text{ MeV)} \end{aligned} \quad (23)$$

1) Bei R. Blackstone et al. [10] mit "semi-hydrostatically pressed, containing natural graphite" bezeichnet (W. Delle [9]).

Die Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden ist jetzt noch besser. Es darf allerdings nicht übersehen werden, daß viele der eingehenden Parameter nicht sehr genau bekannt sind und es durchaus zutreffen kann, daß Fehler in den Parametern sich kompensiert haben. Sicher ist jedoch, daß die Größenordnung der zur Diskussion stehenden Dosis richtig wiedergegeben wird.

Liegen zwei Verbundkörper vor, die sich lediglich durch den Abstand der Einlagerungen, d.h. durch den Volumanteil der Matrix unterscheiden, so kann aus den gemessenen Gesamtausdehnungen beider Verbundkörper und bei bekanntem Matrixvolumenanteil die Längenänderung von Einlagerung und Matrix berechnet werden. Dazu wird für jeden Verbundkörper eine Gleichung der Form von Gl. (7) angesetzt und dieses Gleichungssystem nach η_e und η_m aufgelöst. Experimente, die die Voraussetzung zur Anwendung dieser Formeln in aller Strenge erfüllen, sind nicht bekannt geworden. Zwei Graphitsorten mit Gilsonitkorn kommen jedoch der Forderung gleicher Einlagerungen und gleichen Matrixmaterials bei unterschiedlichem Matrixgehalt nahe (W. Delle [9]). Die Parameter und die Ergebnisse der Auswertung sind in Fig. 5 dargestellt. Hier zeigt sich deutlich, wie gering der Unterschied zwischen den Kurven der relativen Längenänderungen beider Graphitsorten, η_{G1} und η_{G2} , in Abhängigkeit von der Bestrahlungsdosis ist. Mit entsprechend großen Fehlern ist bei den Kurven der relativen Längenänderungen von Korn und Binder, η_e und η_m , zu rechnen. Immerhin wird richtig wiedergegeben, daß sich das Korn im Mittel unter Bestrahlung ausdehnt ($\eta_e > 0$) und der Binder schrumpft ($\eta_m < 0$), obwohl beide Graphitsorten als ganzes nur Schrumpfen zeigen ($\eta_{G1}, \eta_{G2} < 0$).

Wird mit den in Fig. 7 wiedergegebenen Werten von η_e und η_m die Dosis abgeschätzt, bei der die Graphite infolge innerer Spannungen zerfallen, so zeigt sich, daß die erhaltenen Werte zu klein sind. Offenbar ist der Betrag der erhaltenen Werte von η_e und η_m zu groß, was wohl darauf zurückzuführen ist, daß die Einlagerungen und das Matrixmaterial doch nicht den Grad an Gleichheit haben, der zur Erlangung von brauchbaren quantitativen Werten erforderlich ist.

Zum Schluß sollen aus den vorliegenden Formeln Hinweise abgeleitet werden, in welcher Weise Verbundkörper zu entwickeln sind, damit sie ohne Zerfall und mit größerer Stärke höhere Dosen aushalten können. Die verschiedenen Zerreißspannungen nicht erhöht werden, so ist eine solche Verbesserung gleichbedeutend mit der Verminderung des Betrages der inneren Spannungen. Wegen der Gültigkeit von Gl. (1) heißt das vor allem, daß $|\Delta b_1|$ möglichst klein gehalten wird. Das wird nach Gl. (2) erreicht, wenn

- die relativen Längenänderungen der Einlagerungen und der Matrix, η_{ei} und η_m , möglichst gleich groß sind ¹⁾ und
- der Elastizitätsmodul der Matrix E_m möglichst groß gegenüber denen der Einlagerungen E_{ei} ist.

Zwar hängen die inneren Spannungen in erster Näherung nicht von den geometrischen Parametern ab, doch soll der Vollständigkeit halber noch auf den Einfluß des gegenseitigen Abstandes der Einlagerungen eingegangen werden, da diese Größe von allen anderen geometrischen Parametern den vergleichsweise größten Einfluß auf die inneren Spannungen hat. Für den berechneten Modellverbundkörper folgt, daß die inneren Spannungen dem Betrag nach kleiner werden, wenn

- bei $\Delta b > 0$ der Abstand der Mittelpunkte benachbarter Einlagerungen A größer und
- bei $\Delta b < 0$ kleiner wird.

¹⁾ Diese Forderung ist offensichtlich auch aus einfachen Überlegungen zu erhalten; sie wird hier der Vollständigkeit halber angegeben.

Schlußbemerkungen

Bei weiteren Untersuchungen über das Bestrahlungsverhalten von Verbundkörpern wird man vor allem nach Experimenten trachten müssen, die einen besseren Vergleich mit der Theorie erlauben. U.U. kann sich eine Verfeinerung der Modellvorstellungen als notwendig erweisen. Ob eine Erweiterung, die diesen Ansprüchen genügt, noch mit analytischen Verfahren bewerkstelligt werden kann, ist zu bezweifeln.

Herrn W. Delle und Herrn Dr. H. Lühleich danken ich für wertvolle Hinweise. Für ihr förderndes Interesse an diesen Arbeiten gebührt Herrn Professor Dr. B. Liebmann, Herrn Dr. G. Scheidler und Herrn Dr. E. Balthesen Dank. Herrn Dipl.-Phys. L.F. Franzen sei für eine Reihe von Unterstützungen gedankt.

A n h a n g 1

In einem festen elastischen Körper mit der Querkontraktionskonstanten ν gilt für den Verschiebungsvektor \underline{u} folgende Differentialgleichung (vgl. L.D. Landau und E.M. Lifshitz [2])

$$\frac{(1-\nu)}{1+\nu} \text{grad div } \underline{u} - \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \text{rot rot } \underline{u} = \text{grad } \eta \tag{A1}$$

Dabei ist η die gesamte, auf die Längeneinheit bezogene Längenänderung, die sich aus der thermischen Ausdehnung $\alpha \Delta T$ und der durch Bestrahlung und Kriechen hervorgerufenen relativen Längenänderungen, η_L und η_K , usw. zusammensetzt:

$$\eta = \alpha \Delta T + \eta_L + \eta_K + \dots \tag{A2}$$

Für einen unbegrenzten Körper, dessen gesamte relative Längenänderung im Unendlichen konstant wird und den Wert η_0 annimmt, ergibt sich bei

$$\text{rot } \underline{u} = 0$$

als Lösung von Gl. (A1) (vgl. L.D. Landau und E.M. Lifshitz [2])

$$\underline{u} = - \frac{1+\nu}{4\eta_K(1-\nu)} \text{grad} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(x',y',z') - \eta_0}{r} dx' dy' dz' \tag{A4}$$

mit

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{A5}$$

In der Einbettmasse selbst verschwindet $\eta - \eta_0$. Sind die Einlagerungen kugelförmig und bezüglich ihrer Eigenschaften kugelsymmetrisch, so folgt z.B. aus Gl. (A4), daß die Art der r-Abhängigkeit des Verschiebungsfeldes unabhängig vom Radius der Einlagerung ist. Zur Berechnung der elastomechanischen Eigenschaften von Einbettmasse und Binder können daher Partikeln und Korn zunächst als punktförmige Störungen angesetzt werden. Außerdem wird ein Glied angefügt, mit dem der Einfluß von Poren und Hohlräumen erfaßt werden kann. Es ergibt sich dann

$$\eta(x',y',z') - \eta_0 = \sum_1 B_1 \delta(x'-x_1) \delta(y'-y_1) \delta(z'-z_1) - \Delta \eta^* \tag{A6}$$

Summiert wird über alle Einlagerungen; die Koordinaten der i-ten Einlagerung sind gegeben durch x_i, y_i, z_i . Die Faktoren B_i können Funktionen von x, y, z sein.

Bezeichnet \underline{r}_1 den Vektor mit den Komponenten $x-x_1, y-y_1, z-z_1$ und r_1 dessen Betrag, so folgt aus Gl. (A5) und (A6)

$$\underline{u} = \frac{1+\nu}{4\mu(1-\nu)} \sum_1 B_1 \cdot \frac{\underline{r}_1}{r_1^3} + \text{grad} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta \eta^m}{r} dx'dy'dz' \quad (A7)$$

Die Größen B_1 sind exakt nur mit großem Aufwand zu bestimmen. Eine gute Näherung für diese Größen wird bei der Betrachtung einer einzelnen Einlagerung in einer unendlich ausgedehnten Matrix erhalten. Mit r_e wird der Radius dieser Einlagerung, wenn sie aus der Matrix entfernt wurde, und mit r_m der Radius des zurückbleibenden Hohlraums bezeichnet. Sind beide Radien verschieden, so sind zum Einbringen der Einlagerungen zusätzliche elastische Verschiebungen erforderlich, um ein Einpassen zu erreichen. Sind u_{re} und u_{rm} die radialen Verschiebungen von Einlagerung und Matrix und ist r_0 der schließlich erreichte Radius von Einlagerung und Matrixhohlraum, so gilt

$$r_e + u_{re}(r_e) = r_m + u_{rm}(r_m) = r_0 \quad (A8)$$

Die Verschiebungen u_{re} und u_{rm} können als Lösungen der Differentialgleichung (A1) (in Polarkoordinaten) erhalten werden. Sind sowohl die Einlagerungen als auch die Matrix homogen, so folgt unter der Beachtung, daß $\text{grad} \eta = 0$ in den Einlagerungen und der Matrix

$$u_{re} = c_{e1} r \quad \text{und} \quad u_{rm} = c_{m2} / r^2 \quad (A9)$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, wenn der Mittelpunkt der Einlagerungen im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems x, y, z liegt. Die Konstanten c_{e1} und c_{m2} müssen den Randbedingungen angepaßt werden. Gl. (A8) stellt eine solche Bedingung dar. Eine zweite Bedingung ist die Forderung, daß die von der Matrix auf die Einlagerung ausgeübte radiale Spannung gleich der ist, die von der Matrix auf die Einlagerung wirkt. Da $|u_{re}| \ll r_e$ und $|u_{rm}| \ll r_m$ kann außer bei Differenzen $r_e = r_m = r_0$ gesetzt werden, und es wird als Ergebnis der Anpassung der Randbedingungen erhalten

$$u_{re} = -\frac{2r}{r_0} (r_e - r_m) \frac{1}{2+E_e/E_m} \quad \text{und} \quad u_{rm} = \frac{r_0}{r^2} \cdot \frac{r_e - r_m}{1+2E_m/E_e} \quad (A10) \text{ und } (A11)$$

Dabei bezeichnet E_e bzw. E_m den Elastizitätsmodul der Einlagerung bzw. Matrix. Ist die Einlagerung nicht homogen, so sind entsprechende Mittelwerte zu nehmen.

Sind η_e und η_m die nach (A2) bestimmten relativen Längenänderungen der Einlagerungen und der Matrix, so gilt

$$r_e - r_m = (\eta_e - \eta_m) r_0 \quad (A12)$$

Da nach Gl. (A7) bei $\Delta \eta^m = 0$ für eine einzelne Einlagerung in einer unendlich ausgedehnten Matrix gilt

$$u_{rm} = \frac{1+\nu}{4\mu(1-\nu)} B \frac{1}{r^2}$$

kann durch Vergleich mit Gl. (A11) B bestimmt werden. Wird dieser Ausdruck für B für jede Einlagerung in Gl. (A7) eingesetzt, so folgt unter Verwendung von Gl. (A12) für den Verschiebungsvektor in der Matrix

$$\underline{u} = \sum_1 \frac{\Delta b_1 \cdot r_{o1}^3}{r_1^3} \cdot \frac{\underline{r}_1}{r_1} + \frac{1+\nu}{4\mu(1-\nu)} \text{grad} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta \eta^m}{r} dx'dy'dz' \quad \text{mit} \quad \Delta b_1 = \frac{\eta_{e1} - \eta_m}{1+2E_m/E_{e1}} \quad (A13) \text{ und } (A14)$$

Durch diese Verfügung über die Größen B_1 ergibt sich, daß im Falle $E_{e1} = E_m$ (für alle i) Gl. (A13) exakt die Verschiebung in der Matrix wiedergibt, da dann der Verbundkörper als einheitlicher elastischer Körper betrachtet werden kann. Sind dagegen die Moduln $E_{e1} \neq E_m$, so stellt Gl. (A13) eine Näherung dar, die offensichtlich um so gröber wird, je größer die Differenzen $E_{e1} - E_m$ dem Betrag nach sind.

Aus den Komponenten des Verschiebungsvektors können die Verzerrungskomponenten berechnet und damit nach dem Hooke'schen Gesetz für isotrope Körper die Spannungen abgeleitet werden. Es ergeben sich dann die im Hauptteil unter 1 aufgeführten Formeln. Für die aus dem 2. Glied in Gl. (A13) resultierenden Spannungen werden Abkürzungen eingeführt.

Schließlich bleibt anzumerken, daß bei Kriechvorgängen die Abhängigkeit von der Spannung dazu führt, daß Δb_1 nicht mehr konstant sein kann. Daher der abgeleitete Formalismus die Konstanz dieser Größen voraussetzt, müssen entsprechende Mittelwerte verwendet werden. Das bedeutet aber, daß im Vergleich zu den anderen Längenänderungen nur vergleichsweise kleine Kriechdehnungen korrekt berücksichtigt werden können.

A n n a n g 2

Abschätzungen der durch Poren und Hohlräume zusätzlich entstehenden Spannungen können durch die Anwendung der Ergebnisse elastomechanischer Berechnungen von einem Kontinuum mit kugelförmigem Hohlraum erhalten werden. (Hierzu und zu folgendem vgl. S. Timoshenko und I.N. Goodier [3]).

Um bei den betrachteten Materialien sichtbare Zerstörungen zu erzeugen, sind bei Druck dem Betrage nach viel höhere Spannungen als bei Zug erforderlich. Eine in diesem Sinne kritische Druckspannung dürfte ihrem Betrage nach etwa 3 bis 4 mal so groß wie die entsprechende Zugspannung sein (vgl. z.B. W.N. Reynolds [4] und W. Delle et al. [5]). Aus diesem Grunde wird bei der folgenden Wiedergabe von Einzelheiten des Spannungsfeldes um den kugelförmigen Hohlraum im wesentlichen nur auf die Änderung der Zugspannungen eingegangen.

Wird die konstante, den einachsigen Spannungszustand erzeugende Spannung mit σ_E bezeichnet, so gilt für die dem Betrage nach größte Spannung

$$\sigma_{E1\max} = \frac{27 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)} \sigma_E \quad (B1)$$

Diese Spannung, die an der Oberfläche des Hohlraums auftritt, wird bei Werten von ν um 0,3 bis auf etwa das Doppelte der angelegten Spannung ansteigen. Ist σ_E positiv, d.h. ist die angelegte Spannung eine Zugspannung, so gibt Gl. (B1) die maximale Zugspannung an. Ist dagegen σ_E negativ, d.h. wurde eine Druckspannung angelegt, so steigt nur die (nicht so entscheidende) Druckspannung auf den in Gl. (B1) angegebenen Betrag an. Die maximale Zugspannung ist dann an der Oberfläche des kugelförmigen Hohlraumes:

$$\sigma_{E2\max} = \frac{-3 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)} \sigma_E \quad (B2)$$

Die erzeugte Zugspannung kann somit bei Werten von ν um 0,3 bis auf rund 80 % des Betrages der angelegten Druckspannung ansteigen.

Wegen des starken Abfalls der Spannungen mit der Entfernung von der Oberfläche der Pore oder des Hohlraumes und wegen der gegenüber den Einlagerungen wesentlich kleineren Lineardimensionen kann näherungsweise die Berechnung der hier zur Diskussion stehenden Verbundkörper folgendermaßen geschehen:

1. Die Berechnung wird ohne Berücksichtigung von Poren und Hohlräumen ausgeführt.
2. Die durch Poren und Hohlräume sich ergebenden maximalen Spannungen werden - nach entsprechender Superposition - aus den Beziehungen (B1) und (B2) abgeschätzt.

L i t e r a t u r

- [1] E.H. Voice, J.R.C. Gough, D.W. Sturge, R. Ridealph, R.P. Sinden and R.L. Stone, Dragon Internal Report, 1969 -
J. Hollyday, S.E. Hammond, J. Hedderly, P.D. Frampton, T. Görgenyi, and G. Börner, Dragon Internal Report, 1969 -
ORNL - 4200, 1968 -
ORNL - 4324, 1968
- [2] L.D. Landau und E.M. Lifshitz, "Elastizitätstheorie", herausg. von G. Heber, Berlin 1966
- [3] S. Timoshenko and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Company, 1951

- [4] W.N. Reynolds, "Physical Properties of Graphite", Elsevier Publishing Company, 1968
- [5] W. Delle, K. Drittler, G. Haag and H. Schiffers, JÜL-569-RW, 1969
- [6] J.H. Coobs, J.A. Conlin, R.L. Hammer, D.M. Hewette II, J.M. Robbins, C.L. Segaser, R.L.Senn and S.C. Weaver, "Irradiation of Loose and Bonded Coated Particles in HFIR Target", in ORNL-4353, 1969
- [7] J. Baier, priv. Mitteilung
- [8] W. Delle, K. Drittler, G. Haag and H. Schiffers, JÜL-562-RW, 1968 -
K. Drittler, JÜL-605-RW, 1969
- [9] W. Delle, priv. Mitteilung
- [10] R. Blackstone, L.W. Graham, M.R. Everett, Dragon Internal Report, 1969
- [11] J.C. Bokros, G.L. Guthrie, R.W. Dunlap, and A.S. Schwartz, GA - 8700, 1968

T a b e l l e

Liste der einzelnen gerechneten Anordnungen von Einlagerungen und deren charakterisierenden Eigenschaften, soweit sie nicht durch die allgemein gültige Gleichung (5) gegeben sind.

Beziehungen der i_0, k_0, l_0 in (5) für die einzelnen gerechneten Anordnungen von Einlagerungen	Anzahl der in den einzelnen gerechneten Anordnungen eingebrachten Einlagerungen N
$i_0 \leq 1, k_0 \leq 1, l_0 \leq 1$	13
$i_0 \leq 2, k_0 \leq 2, l_0 \leq 2, i_0+k_0+l_0 \leq 2$	19
$i_0 \leq 2, k_0 \leq 2, l_0 \leq 2, i_0+k_0+l_0 \leq 4, i_0+k_0 \leq 3, k_0+l_0 \leq 3, l_0+i_0 \leq 3$	43
$i_0 \leq 2, k_0 \leq 2, l_0 \leq 2, i_0+k_0+l_0 \leq 4$	55
$i_0 \leq 2, k_0 \leq 2, l_0 \leq 2$	63

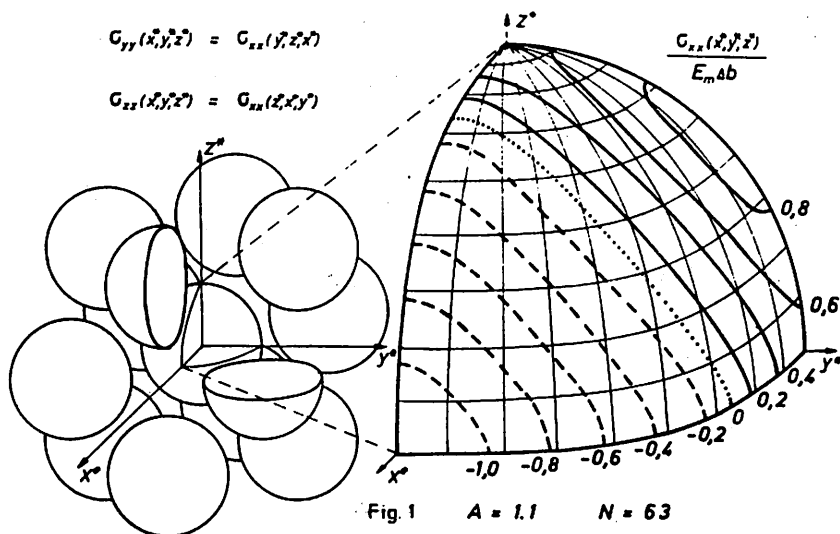


Fig. 1 Die Zug- bzw. Druckspannung in x^* -Richtung dividiert durch E_m und Δb als Höhenlinien-darstellung auf der Oberfläche der mittleren Einlagerung. Der Übersichtlichkeit wegen wurden nur die nächsten Nachbarn der betrachteten Einlagerung - zum Teil durchschnitten - gezeichnet.

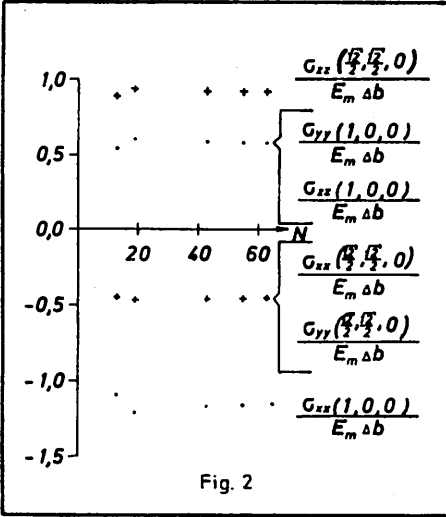


Fig. 2

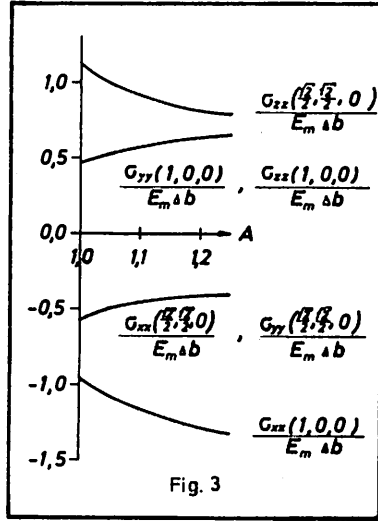


Fig. 3

Fig. 2 Zug- bzw. Druckspannungen dividiert durch E_m und Δb in zwei verschiedenen Punkten auf der Oberfläche der Einlagerung in der Mitte in Abhängigkeit von der Anzahl der Einlagerungen in der Anordnung. $A = 1,1$.

Fig. 3 Zug- bzw. Druckspannungen dividiert durch E_m und Δb in zwei verschiedenen Punkten auf der Oberfläche der Einlagerung in der Mitte in Abhängigkeit von A . $N = 63$.

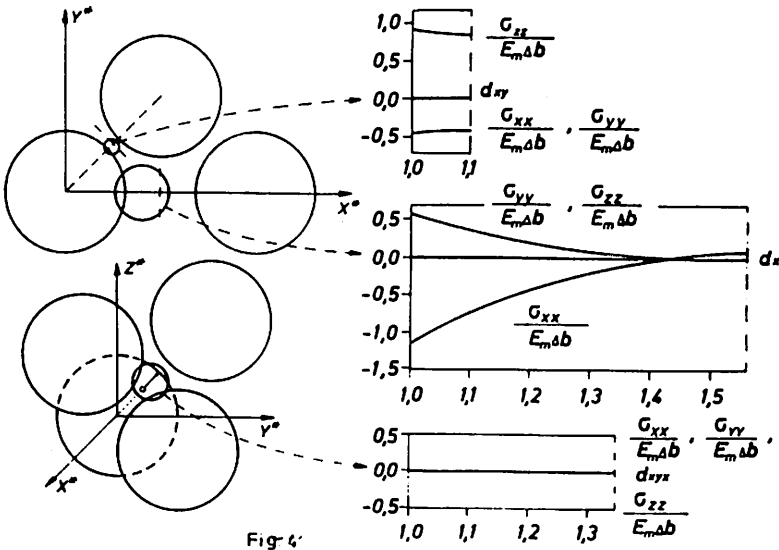


Fig. 4

Fig. 4 Zug- bzw. Druckspannung dividiert durch E_m und Δb auf drei verschiedenen, vom Mittelpunkt der Einlagerung in der Mitte ausgehenden Geraden in Abhängigkeit von der Entfernung von der Oberfläche der Einlagerung in der Mitte. $A = 1,1$; $N = 63$.

Bestrahlungstemperatur
1150°C bis 1215 °C

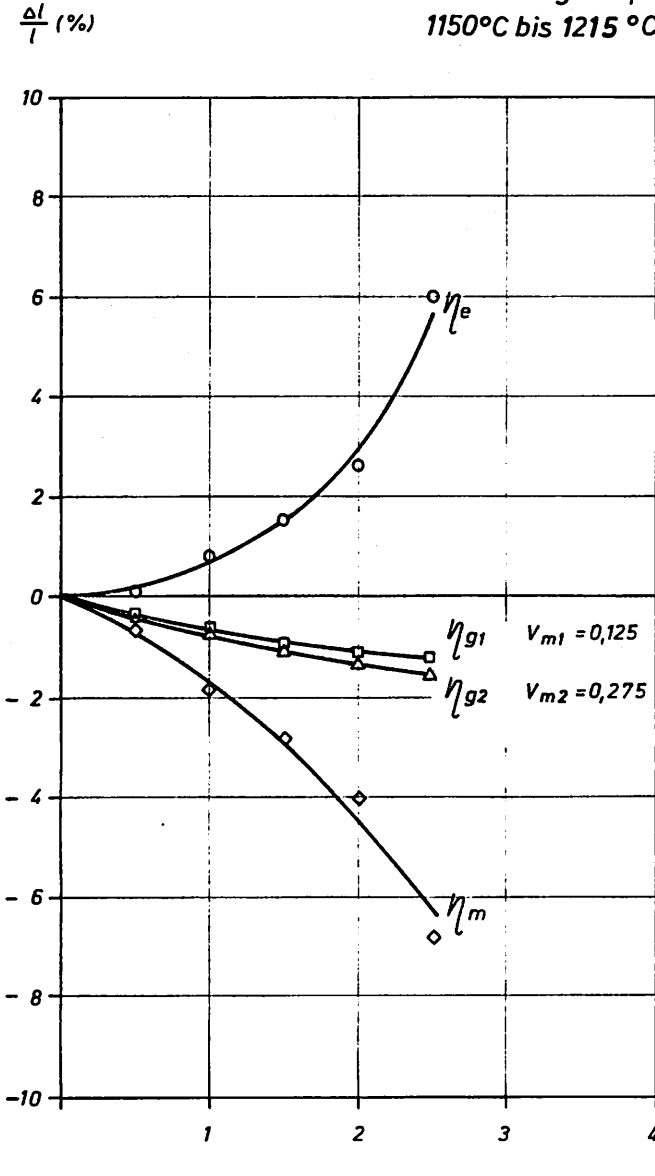


Fig. 5 Die relativen Längenänderungen zweier Graphite mit kugelförmigem Korn, die sich nur durch den Volumanteil des Matrixmaterials v_m unterscheiden, η_{g1} und η_{g2} , und die errechneten Längenänderungen von Korn und Binder, η_c und η_m , in Abhängigkeit von der Bestrahlungsdosis.

DISCUSSION

Q H. WALTHER, Italy

1. Sie berechnen die gesamte Längenänderung des Verbundkörpers und erhalten schliesslich in Gl. (7) ein Ergebnis, das erstaunlicherweise von den elastomechanischen Eigenschaften gar nicht abhängt. Die Gl. (7) wurde erhalten, indem entlang einer Geraden über die ungestörten Längenänderungen der Komponenten gemittelt wird. Ich möchte fragen, ob man zu demselben Ergebnis auch ohne Rechnung hätte gelangen können? Man könnte zwar sagen, dass man von vornherein nicht wissen konnte, entlang welcher Geraden zu mitteln sei - auf der Geraden dürfen keine Spannungen herrschen: andererseits gilt die errechnete Längenänderung für alle Richtungen, weil ein Würfel nach der Dehnung ein Würfel bleibt, was man allerdings auch ohne Rechnung wusste.

2. Weiter möchte ich fragen, wie die Extrapolation der spannungsfreien Geraden in die Einlagerung hinein begründet wurde. Erstaunlich ist das Ergebnis insbesondere, wenn man an ein Beispiel denkt: Etwa an einen Verbundkörper, bei dem die Einlagerungen einmal kleineren und einmal grösseren E-Modul haben. Bei differentieller Ausdehnung sollte man im ersten Fall kleinere, im zweiten Fall grössere gesamte Längenänderungen erwarten. Die Formel macht keinen Unterschied, obwohl die Theorie für kleine Unterschiede im E-Modul gelten sollte.

A K. DRITTLER, Germany

1. Lediglich die Richtung, in welcher keine Spannung herrscht, wird aus den Rechnungen entnommen. Sie gibt an, welche Anteile der relativen Längenänderung von Einlagerungen und Matrix zu nehmen sind. (In den anderen Richtungen herrschen Spannungen, so dass eine einfache Überlagerung nicht möglich ist). Die Tatsache, dass ein Würfel aus dem Verbundkörper - sofern periodisch herausgeschnitten - wieder in einen Würfel bei Ausdehnung übergeht, wurde auch hier aus einfachen Überlegungen gefolgert. Übrigens hätte ein in Gruppentheorie gut bewandeter Physiker die Richtung ohne Spannung direkt aus der Symmetrie und zusätzlichen energetischen Betrachtungen herleiten können. Ich sah es erst nach den Rechnungen.

2. Werden die Lösungen für die elastomechanischen Grössen nach entsprechenden Funktionen entwickelt, so kann für Näherungen nach bestimmten Gliedern abgebrochen werden. Die Näherungen ergeben die zur Diskussion stehende Extrapolation. Die Formel der Gesamtlängenänderung wurde von mir aufgestellt, um eine Abschätzung zu bekommen. Sie kann natürlich verbessert werden und sollte es auch. Immerhin zeigt der Vergleich mit Experimenten, der im "preprint" wiedergegeben ist, recht gute Ergebnisse.