

**SPANNUNGEN UND VERSCHIEBUNGSGESCHWINDIGKEITEN  
IN PLASTIFIZIERTEN ZONEN  
ROTATIONSSYMMETRISCHER BEANSPRUCHUNGEN  
MIT ANWENDUNG AUF DEN REAKTORBAU**

T. TELLKAMP,

*Siemens AG, Reaktortechnik, Erlangen, Germany*

A B S T R A C T

For the theoretical investigation the well known equations of the mathematical theory of plasticity from LEVY-MISES shall be used, especially the fundamental equations for axially symmetric stresses and plastic deformations are used in connection with the problem to be handled here.

For the analysis of the stress field the equations of equilibrium and the yield criterion of MISES are increased by a condition, which is based on the stress-strain velocity-relations, because the problem is not statically determined. The solution of these equations bases on the theory of characteristics.

The obtained theoretical results are used for the investigation of stresses in materials under bolted connections.

It may be demonstrated, that the forces obtained by this method are much greater than those obtained by conventional methods.

### Problemstellung

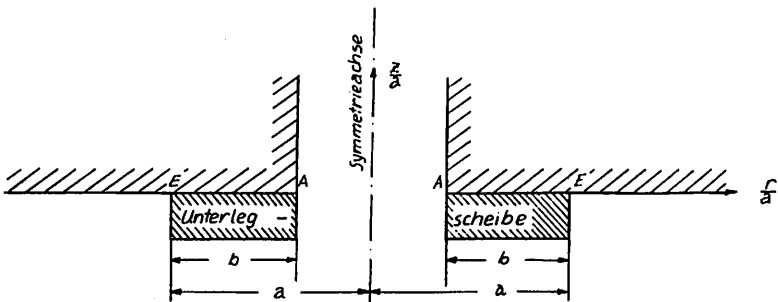
Die Beherrschung von Spannungen und Verformungen in konstruktiven Materialien ist immer dann von besonderem Interesse, wenn mit steigendem Ausnutzungsgrad des Materials Spannungen und Verformungen aus der linearen Elastizitätstheorie allein nicht mehr herleitbar sind.

Eine gesicherte quantitative und/oder qualitative Aussage muß sich bei der Analyse auf die Erfassung plastischer Verformungen stützen. Die Berücksichtigung plastischer Verformungen stößt im allgemeinen auf erhebliche mathematische und rechentechnische Schwierigkeiten, da die meisten Probleme über die Gleichgewichtsbedingungen und ein Fließkriterium allein nicht lösbar sind, es müssen fast immer in das Gleichungssystem angepaßte Spannungs-Verzerrungsbeziehungen miteinbezogen werden.

In der Technik wird der Konstrukteur infolge steigender Anforderungen an das Material zum Nachweis der Integrität immer häufiger mit der Analyse plastischer Verformungen konfrontiert.

Ziel dieser Untersuchungen ist es daher, die aus der mathematischen Plastizitätstheorie bekannten Zusammenhänge für ein bestimmtes und akutes Problem aus der Technik (hier Reaktortechnik) zweckentsprechend zu formulieren.

Um den mathematischen Formalismus nicht unnötig zu erweitern, werden elastische Verformungen gegen plastische Verformungen und Materialverfestigungen vernachlässigt, das Material verhält sich demnach ideal-starr-plastisch, und es sind die LEVY-MISESSschen Grundgleichungen der mathematischen Plastizitätstheorie anwendbar (inkompressibles Material) (vgl. PRAGER, HODGE [1\_7]). Sie werden angewandt auf rotationssymmetrische Flächenpressungen von Flanschverbindungen, dabei nimmt hier die Aufbereitung der Gleichung für dieses Problem einen breiten Raum ein.



Skizze 1: Meridianschnitt

Die Skizze zeigt einen Meridianschnitt durch die benachbarte Umgebung einer Flanschschraube. Mit steigender Last wird sich innerhalb der Kontaktfläche AE eine plastische Zone ausbilden, die bei einer bestimmten Lasthöhe die gesamte Kontaktfläche erfaßt (Beginn des uneingeschränkten plastischen Fließens). Die zu diesem Zeitpunkt vorliegende Pressung wird ermittelt und den bislang ermittelten Werten gegenübergestellt.

Gleichzeitig wird angestrebt, den nicht unerheblichen mathematischen Formalismus zum Zwecke einfacher Handhabung zu reduzieren.

### 1. Grundgleichungen der LEVY-MISESschen Plastizitätstheorie

Die der Problemstellung entsprechende mathematische Formulierung baut auf die LEVY-MISESsche Plastizitätstheorie auf.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen werden Zylinderkoordinaten  $(r, \theta, z)$  eingeführt, in diesen Koordinaten lauten die Gleichgewichtsbedingungen für ein zur z-Achse symmetrisches Spannungsfeld:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (1b)$$

Mit der Fließbedingung

$$(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau^2 = 6k^2, \quad (2)$$

und den Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = \lambda(2\sigma_r - \sigma_t - \sigma_z), \quad (3a)$$

$$\dot{\epsilon}_t = \frac{\dot{u}}{r} = \lambda(2\sigma_t - \sigma_z - \sigma_r), \quad (3b)$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} = \lambda(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_t), \quad (3c)$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} = 6\lambda\tau \quad (3d)$$

stehen insgesamt 7 Gleichungen zur Beschreibung der 7 Unbekannten zur Verfügung (4 Spannungskomponenten, 2 Geschwindigkeitskomponenten,  $\lambda = \lambda(r, z, t)$ ).

Es bedeuten:

$\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$  und  $\tau_{rz} = \tau_{zr} = \tau$  die Komponenten des Spannungstensors,

$\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_z$  und  $\dot{\gamma}_{rz} = \dot{\gamma}_{zr} = \dot{\gamma}$  Komponenten des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten,

$\dot{u}, \dot{w}$  Komponenten des Vektors der Verschiebungsgeschwindigkeiten,

$\lambda = \lambda(r, z, t)$  ein nicht negativer Plastizitätsmodul,  
 $k$  eine Materialkonstante.

## 2. Lösungsverfahren

Die hier, im Gegensatz zum ebenen Verzerrungs- oder Spannungszustand, zur Beschreibung der vier gesuchten Spannungsfunktion zunächst nicht ausreichenden Systeme (1) und (2) werden durch eine zusätzliche (kinematische) Aussage aus (3) ergänzt, wenn in

$$\dot{\epsilon}_r - \frac{\partial(r\dot{\epsilon}_r)}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

der Plastizitätsmodul versuchsweise in erster Näherung von  $z$  und  $t$  allein abhängig angenommen wird.

Für das Lösungsverfahren erweist es sich als zweckmäßig, die vier Spannungsfunktionen durch folgende drei neue, abhängige Veränderliche  $p$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  zu ersetzen.

Mit

$$\sigma_r = p + \frac{2}{13} k \cos \varphi \sin(\psi + \frac{\pi}{6}), \quad (5a)$$

$$\sigma_z = p - \frac{2}{13} k \cos \varphi \sin(\psi - \frac{\pi}{6}), \quad (5b)$$

$$\sigma_\varphi = p - \frac{2}{13} k \cos \varphi \cos \psi, \quad (5c)$$

$$\tau = -k \sin \varphi \quad (5d)$$

ist die Fließbedingung identisch erfüllt.

Die grundlegenden Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld ergeben sich aus (3) mit (5) zu

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\dot{u}}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6a)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \sin \psi - \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (6b)$$

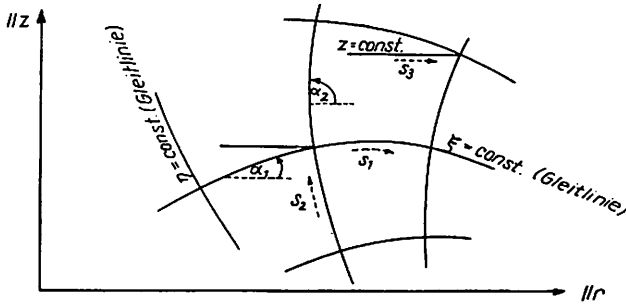
Sie folgen aus (3) und (5) durch Elimination des Plastizitätsmoduls.

### 2.1 Transformation der Ausgangsgleichungen

Das auf die Gleichungen (1), (4) und (6) angewandte Lösungsverfahren baut auf die Charakteristikentheorie auf (M. SCHÄFER [2\_7, [3\_7]). Transformation der Bestimmungsgleichungen auf charakteristische Koordinaten liefert dann einmal die Differentialgleichungen zur Festlegung des charakteristischen Netzes und weiterhin die auf dieses Netz bezoge-

nen Relationen hinsichtlich der Spannungs- und Geschwindigkeitsgrößen.

Entsprechend den 3 Gleichungen für die Spannungsgrößen ergeben sich 3 reelle (Dgl-System hyperbolisch) charakteristische Grundkurven, von denen zwei mit den Hauptschubspannungstrajektorien den sogenannten Gleitlinien zusammenfallen und gleichzeitig die Grundkurven des Feldes der Verschiebungsgeschwindigkeiten darstellen (Skizze)



Skizze 2: Charakteristische Grundkurven in der r,z-Ebene

Die die charakteristischen Grundkurven beschreibenden Dgl. lauten:

$$\frac{dz}{dr} \equiv \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \varphi + \sqrt{1 - \cos \varphi \cos \psi}}{\cos \varphi \sin \psi} \quad (7a)$$

$$\frac{dz}{dr} \equiv \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \varphi - \sqrt{1 - \cos \varphi \cos \psi}}{\cos \varphi \sin \psi} \quad (7b)$$

$$\frac{dz}{dr} \equiv \operatorname{tg} \alpha_3 = 0 \quad (7c)$$

Wegen des quasilinearen Ausgangssystems enthalten die Dgl. der charakteristischen Grundkurven die gesuchten Spannungsfunktionen.

Die auf diese Grundkurven bezogenen Spannungs- und Geschwindigkeitsgleichungen nehmen folgende Form an:

### Spannungsgleichungen

$$k \frac{\partial(\sin \varphi)}{\partial S_1} \operatorname{ctg} \alpha_1 + \frac{\partial p}{\partial S_1} - k \frac{\partial[\cos \varphi \sin(\psi - \frac{\pi}{2})]}{\partial S_1} = \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \psi) \cos \alpha_1 + \tau \sin \alpha_1}{r} \quad (8a)$$

$$k \frac{\partial(\sin \varphi)}{\partial S_2} \operatorname{ctg} \alpha_2 + \frac{\partial p}{\partial S_2} - k \frac{\partial[\cos \varphi \sin(\psi - \frac{\pi}{2})]}{\partial S_2} = \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \psi) \cos \alpha_2 + \tau \sin \alpha_2}{r} \quad (8b)$$

$$k \left( \frac{\partial \varphi}{\partial S_3} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial S_3} \operatorname{tg} \psi \right) = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2r \cos \varphi \cos \psi} \quad S_3 \equiv r \quad (8c)$$

### Geschwindigkeitsgleichungen

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial S_1} \cos \alpha_1 + \frac{\partial \dot{W}}{\partial S_1} \sin \alpha_1 = - \frac{\dot{U}}{2r} , \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial S_2} \cos \alpha_2 + \frac{\partial \dot{W}}{\partial S_2} \sin \alpha_2 = - \frac{\dot{U}}{2r} . \quad (9b)$$

Die Gleichungssysteme (7), (8) und (9) sind näherungsweise numerisch zu lösen, was im Prinzip auf ein Verfahren mit vorderen Differenzen hinausläuft (vgl. hierzu A.D. COX, G. EASON und H.G. HOPKINS [4\_7]).

### 3. Ermittlung der Flächenpressung an Unterlegscheiben bei Schraubenverbindungen

In der Reaktortechnik ist möglicherweise mit wachsendem Kesselvolumen bei Druckwasserreaktoren die Unterbringung der Flanschschrauben problematisch. Diese Ausführungen sollen daher anhand der gewonnen Ergebnisse zeigen, welche Sicherheitsreserven die bisherigen Auslegungsrechnungen beinhalten.

Zu diesem Zweck werden die Spannungen in der vollplastifizierten Umgebung der Schraubverbindung unterhalb der Unterlegscheibe untersucht. In Anlehnung an die Skizze 1, Seite 1 ist anzunehmen, daß sich mit steigender Belastung innerhalb der hier, nicht unbedingt, als reibungsfrei angenommenen Kontaktfläche zwischen Unterlegscheibe und Flanschmaterial plastische Zonen ausbreiten, die bei maximaler Last die gesamte Kontaktfläche erfassen (Beginn des uneingeschränkten plastischen Fließens).

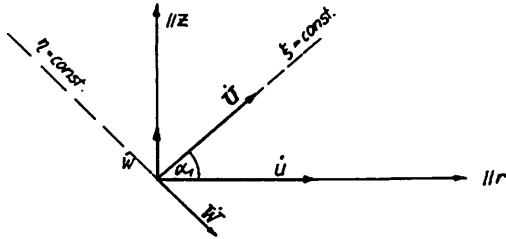
#### 3.1 Praktische Berechnung

Zur Auffindung und/oder fortlaufenden Konstruktion der charakteristischen Grundkurven werden zunächst die Verschiebungsgeschwindigkeiten  $\dot{u}$  und  $\dot{w}$  durch die Verschiebungsgeschwindigkeiten  $\dot{U}$  und  $\dot{W}$  in den Grundkurven nach Skizze 3 durch

$$\dot{u} = \dot{U} \cos \alpha_1 + \dot{W} \sin \alpha_1 , \quad (10a)$$

$$\dot{w} = \dot{U} \sin \alpha_1 - \dot{W} \cos \alpha_1 , \quad (10b)$$

ersetzt.



Skizze 3: Transformation der Geschwindigkeitskomponenten.

Mit (10) folgt aus (9)

$$d\dot{U} + \dot{W}d\alpha = -\frac{\dot{U} + \dot{W}tq\alpha_1}{2r} dr, \quad (11a)$$

$$d\dot{W} - \dot{U}d\alpha = \frac{\dot{U}tq\alpha_2 - \dot{W}}{2r} dr, \quad (11b)$$

(vgl. z.B. R. HILL [7], A.D. COX, G. EASON und H.G. HOPKINS [4].

Zur Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes und zur Festlegung der Ausgangsgrößen für die charakteristischen Grundkurven soll das anfängliche plastische Fließen auf den Bereich ABCD der Abbildung 1 beschränkt bleiben, d.h. längs der Charakteristik  $\xi = \text{const.}$

Diese Annahme erzwingt aus Stetigkeitsgründen das Verschwinden der Komponente  $\dot{W}$  senkrecht zur Charakteristik  $\xi = \text{const.}$ , und aus (11a) folgt:

$$\dot{U} = \frac{B}{\sqrt{r}} \quad (B = \text{Integrationskonstante}).$$

Soll darüber hinaus am Übergang vom plastischen Bereich zum Restgebiet  $\dot{U}$  ebenfalls als stetig angenommen werden, so ist B gleich Null zu fordern, und nach (3b) mit (5) gilt:

$$\psi = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Damit liegen die Ausgangsgrößen zur Ermittlung des charakteristischen Netzes, dessen Konstruktion von der freien Oberfläche  $r \geq 1$  aus zu erfolgen hat, eindeutig fest.

Der Startpunkt D in Abbildung 1 ist so zu wählen, daß die durch ihn führende Gleitlinie im Punkt A endet. Die Festlegung oder Konstruktion des Gleitliniennetzes erzwingt das gleichzeitige Lösen der Spannungsgleichungen (8). Das Geschwindigkeitsfeld ist in diesem Beispiel erst bei bereits ermitteltem Gleitliniennetz nach (9) oder (11) zu bestimmen. Den typischen Verlauf eines Gleitliniennetzes (charakteristische Grundkurven ohne  $z = \text{const.}$ ) in der  $r, z$ -Ebene zeigt Abbildung 1.

Um den nicht unerheblichen rechentechnischen Aufwand zur Erstellung dieses Netzes zu umgehen, kann dieses Netz mit hinreichender Genauigkeit durch das in Abbildung 2 aus Geraden und Kreisbögen bestehende Netz approximiert werden, wodurch sich die Gleichungen (8) erheblich vereinfachen, und Gleichung (8a) zumindest längs der Charakteristik ABCD direkt integrierbar ist. Die Ergebnisse dieser Integration sind in der Abbildung 3 dargestellt.

Es zeigt sich, daß die bei herkömmlicher Betrachtungsweise und selbst mit 1,5-facher Streckgrenze ermittelte Pressung bis zu 50 % unter der hier berechneten Pressung liegt.

In Abbildung 4 wird veranschaulicht welche Oberflächenaufwölbungen zu Beginn des uneingeschränkten plastischen Fließens zu erwarten sind. Ein Volumenvergleich zwischen der Aufwölbung und dem unter der Unterscheibe verdrängtem Material lieferte eine gute Übereinstimmung.

#### LITERATUR

- 1 W. PRAGER und P.G. HODGE                      Theorie idealplastischer Körper,  
Springer Verlag 1954
- 2 M. SCHÄFER                      Charakteristikenverfahren und Verdichtungsstoßtheorie,  
Göttinger Monographien  
C 4.1 1946
- 3 M. SCHÄFER                      Miscellaneen der angewandten Mechanik  
Akademie Verlag  
Berlin 1962
- 4 A.D. COX, G. EASON  
and H.G. HOPKINS                      Axially Symmetric Plastic Deformation  
in Soils, Phil. Trans. A 254, 1 1961



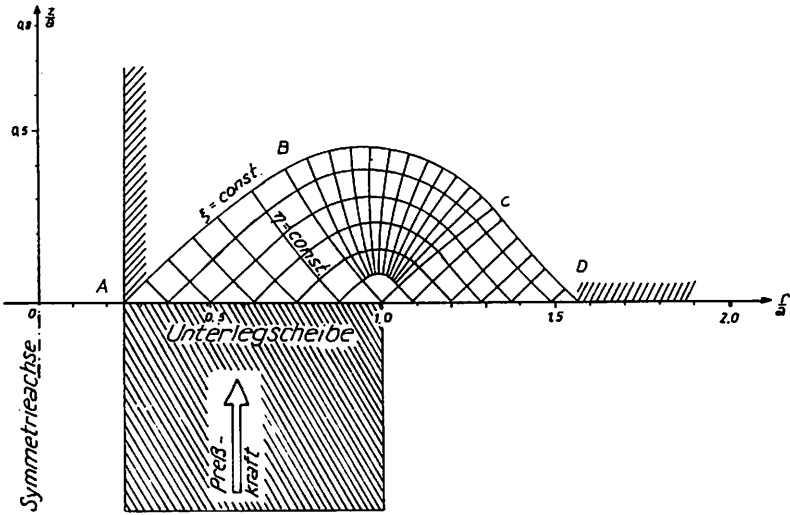


Abb. 1: Netz der charakteristischen Grundkurven  $\xi = \text{const.}$  und  $\eta = \text{const.}$

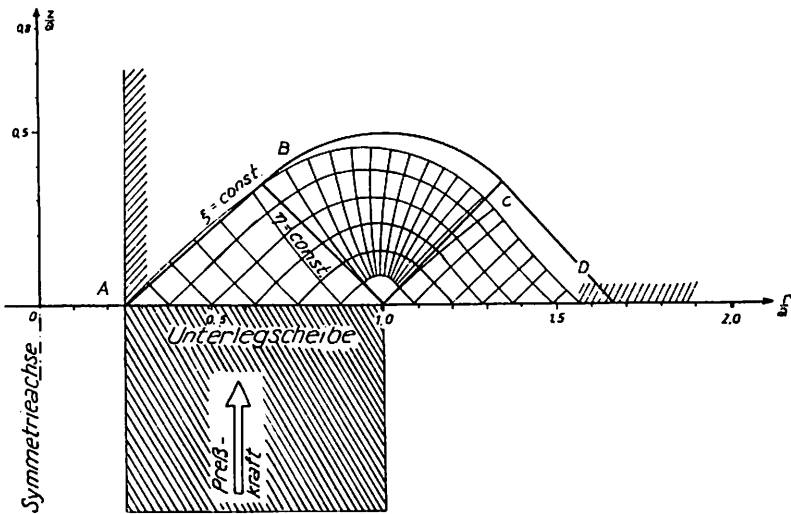


Abb. 2: Approximation des Charakteristikennetzes durch einfache Geometrien.

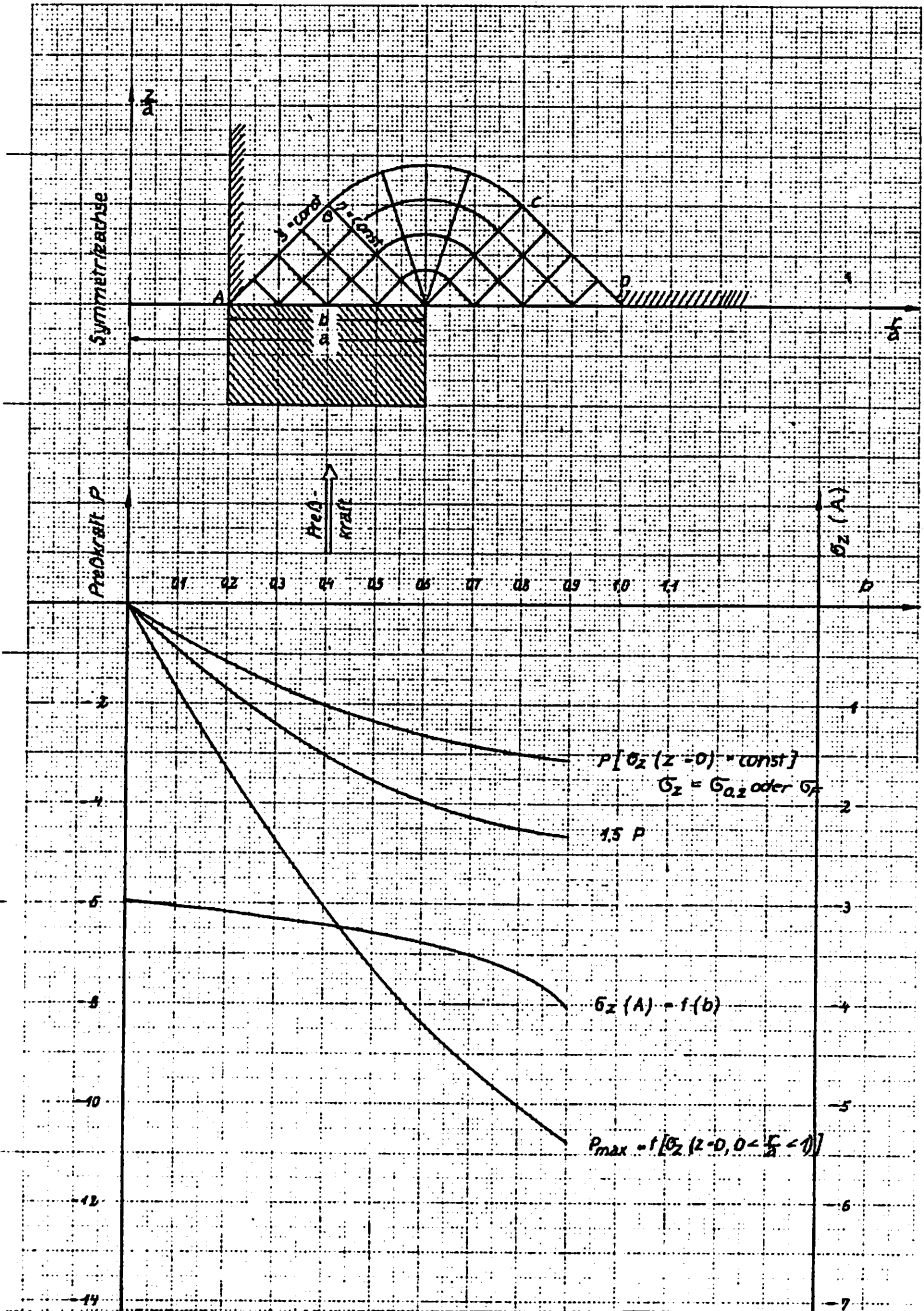


Abb. 3: Abhängigkeit der Preßkraft von der Ringbreite und Gegenüberstellung.

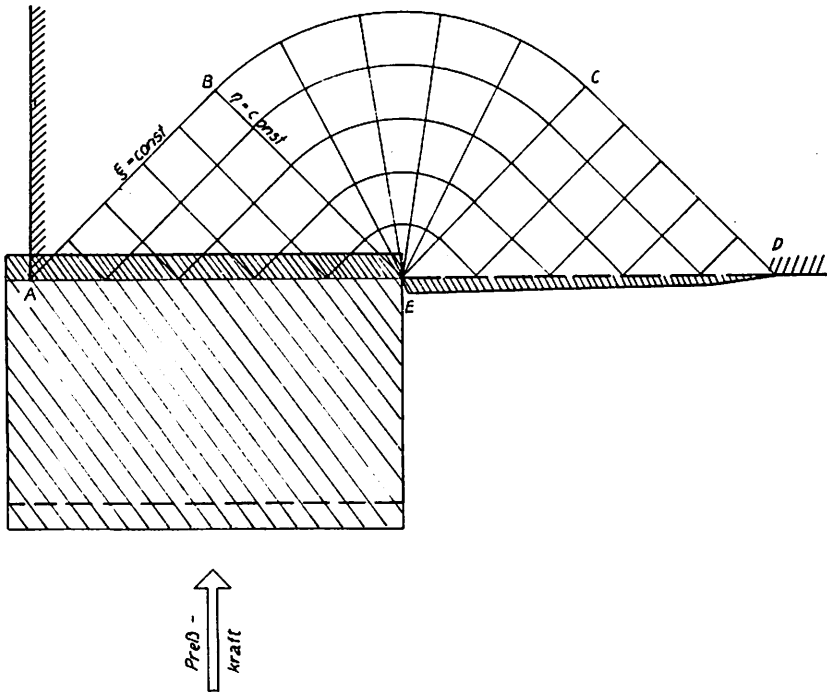


Abb. 4: Aufwölbung der freien Oberfläche infolge plastischen Eindringens des Ringes (Unterlegscheibe).