

On the Modelling of Contact Problems with Friction by the Finite Element Method

A. Godinas, R. Charlier, S. Cescotto

*Université de Liège, Service de Résistance des Matériaux, Quai Banning 6,
B-4000 Liège, Belgium*

ABSTRACT

Un modèle de contact avec frottement est développé dans un contexte de grandes déformations et de matériaux non linéaires. Une formulation élasto-plastique incrémentale est adoptée et intégrée dans un élément fini. Deux exemples numériques sont présentés.

1. INTRODUCTION

Dans les problèmes de mise à forme des matériaux, les trois sources de non linéarité sont la loi constitutive inélastique, les très grandes déformations et le contact entre le matériau déformé et l'outil de mise en forme (matrice, cylindre de laminage, ...). Pour aborder numériquement ces problèmes par éléments finis, une approche incrémentale est imposée par les deux premières sources de non linéarité. Il est donc naturel, dans ce cadre, d'aborder les problèmes de contact de manière incrémentale, d'autant plus que dans le cas de glissement avec frottement, on est en présence d'un phénomène dissipatif.

Le contact entre deux corps dépend de l'état de leurs surfaces. Elles ont une allure irrégulière, composée d'une distribution aléatoire d'aspérités.

Dès lors, l'entrée en contact des deux corps s'accompagne de la déformation plastique ou de la rupture de ces aspérités.

Dans ce qui suit, nous supposons que la taille des aspérités est très faible par rapport aux dimensions des corps et aux dimensions des éléments finis utilisés. Dès lors, il paraît logique d'abandonner le concept microscopique pour aborder un concept macroscopique du contact, et une représentation statistique du phénomène, à l'instar de ce qui se fait en plasticité pour passer du cristal au solide complexe [1]. De plus, l'intégration numérique au sein des éléments finis, qui favorise quelques points discrets, justifie également cette approche. Dès lors, nous ne nous occuperons pas de la notion d'effet "non local" développé par ODEN et PIRES [2], ni de l'étude de MROZ et MICHALOWSKI [3], qui est centrée sur une géométrie d'aspérité particulière.

Nous supposons également qu'aucun lubrifiant ou polluant n'influence le frottement entre les deux corps : nous nous plaçons dans le cas du frottement sec.

2. FORMULATION ELASTO-PLASTIQUE

Par souci de simplification, la formulation est développée en état plan. On a recours à une méthode de pénalisation. Dès lors, il peut y avoir une légère pénétration du solide défor-

mé dans la fondation. Celle-ci est mesurée par la distance d (figure 1) perpendiculaire au corps déformé, avec la convention de signe suivante :

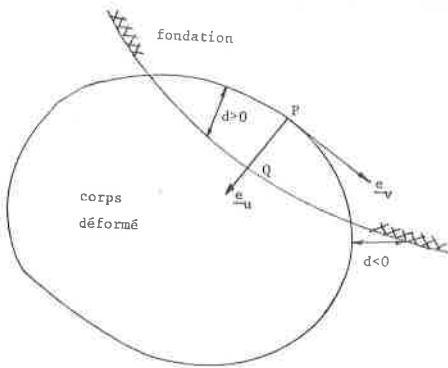


Figure 1

$d \leq 0$: il n'y a pas de contact
 $d > 0$: il y a contact.

Dans la zone de contact existent une pression de contact p et un frottement tangentiel τ . Nous caractérisons leur évolution par la plasticité incrémentale.

Dans l'espace des contraintes (p, τ) on définit une surface de plasticité f et, par là-même, une zone élastique et une zone plastique (figure 2).

L'équation de la surface de plasticité est :
 $f = |\tau| - B - \phi p = 0$ (1).
 Le paramètre B représente une adhérence et ϕ est le coefficient de frottement.

3. LOI CONSTITUTIVE EN DOMAINE ELASTIQUE

Soit (e_u, e_v) un système d'axes locaux en un point P du corps appartenant à la zone de contact et (u, v) la vitesse dans ces axes du point Q , intersection de e_u avec la fondation. Si l'on se trouve en domaine élastique, c'est-à-dire si $f < 0$, on pose :

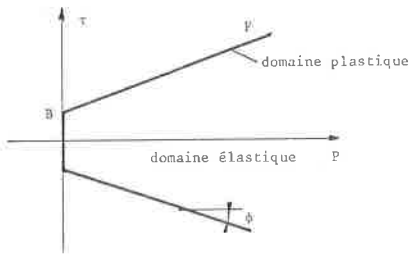


Figure 2

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & K_\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

où K_p et K_τ sont des coefficients de pénalisation (fondation élastique mais très raide).

4. LOI CONSTITUTIVE EN DOMAINE PLASTIQUE

La vitesse de Q est décomposée en une partie élastique et une partie plastique :

$$\dot{u} = \dot{u}^e + \dot{u}^p \quad ; \quad \dot{v} = \dot{v}^e + \dot{v}^p \quad (3)$$

Mais seul le glissement tangentiel accompagné de frottement est dissipatif; par conséquent, on pose que $\dot{u}^p = 0$ et $\dot{v}^p \neq 0$. Dès lors, on ne peut admettre que la vitesse inélastique (\dot{u}^p, \dot{v}^p) obéisse à la loi de normalité par rapport à la surface de plasticité $f = 0$. Il faut donc définir une surface d'écoulement $g = 0$ différente de la surface de plasticité (loi non associée) de telle sorte que les vitesses plastiques se produisent uniquement dans la direction tangentielle :

$$g = |\tau| - a \quad \text{si } p > 0 \quad (4)$$

g non définie si $p = 0$ (pas de contact)

Dès lors, on aura :

$$\dot{u}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial p} = 0 \quad ; \quad \dot{v}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \tau} = \lambda \cdot \text{sgn } \tau \quad (5)$$

On détermine λ en exprimant la condition de cohérence sur f au cours du déplacement plastique $\dot{f} = 0$. Or dans (1), B et ϕ peuvent évoluer au cours du glissement plastique, parce que l'état des surfaces se modifie éventuellement. L'évolution de B et ϕ représente un écrouissage. On se contentera ici d'un écrouissage isotrope et l'on postulera que B et ϕ sont fonctions de λ , c'est-à-dire aussi de la dissipation d'énergie D par frottement puisque :

$$\dot{D} = \tau \dot{v}^p = \tau \lambda \text{sgn } \tau = \lambda |\tau| \quad (6)$$

Soit donc :

$$f = |\tau| - B(\lambda) - \phi(\lambda) \cdot p = 0 \quad ; \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \dot{\tau} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = 0 \quad (7)$$

d'où l'on tire :

$$\dot{\lambda} = [B'(\lambda) + p \phi'(\lambda)]^{-1} \cdot [\dot{\tau} \text{sgn } \tau - \dot{p} \phi] \text{ avec } B' = \frac{dB}{d\lambda} ; \phi' = \frac{d\phi}{d\lambda} \quad (8)$$

Dès lors, en regroupant (2), (3), (5) et (8), il vient :

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}^e \\ \dot{v}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{v}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/K_p & 0 \\ 0 & 1/K_\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} + \frac{\alpha}{B' + p \phi'} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\phi \text{sgn } \tau & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

où $\alpha = 0$ en domaine élastique et $\alpha = 1$ en domaine plastique. En inversant, on a :

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ \alpha \phi K_p K_\tau \text{sgn } \tau & K_\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$1 + \frac{\alpha K_\tau}{B' + \phi' p}$$

On remarque que la matrice constitutive est non symétrique, même en l'absence d'écrouissage.

5. INTEGRATION TEMPORELLE DE LA LOI CONSTITUTIVE

Soit un incrément de déplacements en axes globaux, survenant en un incrément de temps Δt . Quel est l'incrément $(\Delta p, \Delta \tau)$ des contraintes de contact qui en résulte ? La réponse dépend de l'état au début de l'incrément, de la loi constitutive adoptée, et du type de calcul des déformations.

Nous avons une connaissance faible de la vitesse en axes globaux. Supposons que cette vitesse soit constante. Dès lors, au cours de l'incrément, la position et l'orientation des axes locaux $(\underline{e}_u, \underline{e}_v)$ varie. Donc la vitesse (\dot{u}, \dot{v}) de Q en axes locaux varie également. Nous choisissons de calculer une vitesse moyenne en nous plaçant dans les axes locaux au temps $t_0 + \theta \Delta t$, $\theta \in [0, 1]$. Nous calculons également la vitesse de contrainte $(\dot{p}, \dot{\tau})$ à ce moment. Si $\theta = 0$, nous obtenons un schéma d'intégration explicite. Pour $\theta = 1$, nous obtenons un schéma totalement implicite.

L'intégration de la loi constitutive se fait selon deux méthodes : si l'état de contrainte est initialement et reste élastique, (2) s'intègre immédiatement. Si l'on part d'un état plastique, il faut distinguer entre un processus de chargement plastique ou de déchargement élastique. Ce dernier est repéré lorsque l'indicateur $\dot{p}_e \frac{\partial f}{\partial p} + \dot{\tau}_e \frac{\partial f}{\partial \tau}$ est négatif. Cet indicateur, préconisé par [1], est plus général que l'indicateur classique $\dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} + \dot{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tau}$, qui est imprécis en cas d'écrouissage faible et n'est pas valable en cas d'écrouissage négatif.

Dans le cas de déchargement élastique, c'est encore (2) qui s'applique et s'intègre immédiatement. Au contraire, si l'on a un chargement plastique, c'est (10) qu'il faut intégrer. On note que la matrice constitutive est constante en l'absence d'écroutissage (ϕ et B constants; $\phi' = B' = 0$). Dans ce cas, il vient :

$$\begin{Bmatrix} \Delta p \\ \Delta \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ \phi K_p \cdot \text{sgn } \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} \quad (11)$$

qui ne dépend pas de l'état de contrainte. Dans le cas contraire, l'intégration précise de (10) nécessite des petits incréments de déformation et un schéma en deux étapes précis au second ordre [4].

Pour obtenir une bonne précision sans trop augmenter le temps de calcul, il est utile de diviser le pas en sous-intervalles, afin d'affiner le calcul des vitesses locales de déformations et de contraintes.

6. UN ELEMENT FINI DE CONTACT

L'élément fini de contact doit être compatible avec les éléments modélisant le corps déformable. Ceci nous a conduit à développer un élément isoparamétrique du second degré. La frontière du corps déformable est représentée par un arc de parabole. La fondation est représentée par une suite d'arcs de paraboles. Ces arcs sont définis par 3 noeuds.

Les équations d'équilibre sont obtenues par intégration numérique de GAUSS (2 ou 3 points) du principe du travail virtuel :

$$\tau = \int_S (p \delta u + \tau \delta v) dS = \sum_{PI} (p \delta u + \tau \delta v) W |J|$$

où W est le poids d'intégration et |J| le déterminant du jacobien de la transformation isoparamétrique.

En chaque point d'intégration, on examine s'il y a contact ou non. Dans l'affirmative, on calcule les contraintes (p, τ) en fin de pas.

On obtient ainsi les forces nodales énergétiquement équivalentes :

$$F_x = \sum_{PI} (p \cdot y_{,\xi} - \tau \cdot x_{,\xi}) \cdot N_i \cdot W$$

$$F_y = \sum_{PI} (-p \cdot x_{,\xi} - \tau \cdot y_{,\xi}) \cdot N_i \cdot W$$

où N_i sont les fonctions d'interpolation et $x_{,\xi}$ et $y_{,\xi}$ les dérivées des coordonnées globales par rapport à la coordonnée isoparamétrique.

Pour déterminer la matrice de rigidité tangente, il suffit alors de dériver l'expression de ces forces nodales. On obtient une matrice non symétrique. En effet, d'une part la matrice constitutive [C] est parfois non symétrique. D'autre part, les contraintes p et τ sont des forces non conservatives. Un algorithme de résolution de systèmes d'équations non symétriques est donc nécessaire.

7. EXEMPLES NUMERIQUES

Nous présentons ici deux exemples numériques.

En premier lieu, l'assemblage hydroformé entre un tube en aluminium et un embout d'acier très rigide (figure 3) a été étudié. Le problème est axisymétrique. Le comportement élasto-plastique de l'aluminium est représenté par une loi de type RAMBERG-OSGOOD. Le tube est modé-

lisé par 3 couches d'éléments finis à 8 noeuds. L'embout est supposé totalement rigide et représente la fondation. 16 éléments de contact sont placés entre l'embout et le tube. Le glissement est totalement libre ($\phi = 0$), et il n'y a pas d'adhésion ($B = 0$).

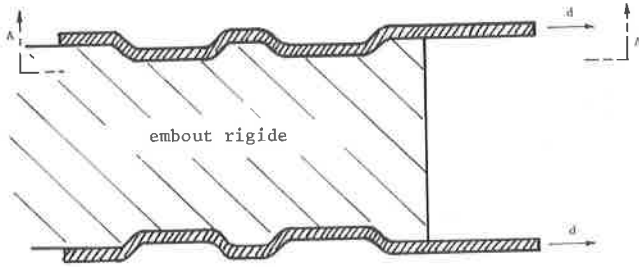


Figure 3

La mise en charge se fait par déplacements imposés de l'extrémité du tube. La structure déformée par un déplacement de 3 et de 5 % de la longueur modélisée de tube est représentée à la figure 4 (seule la coupe A-A est dessinée).

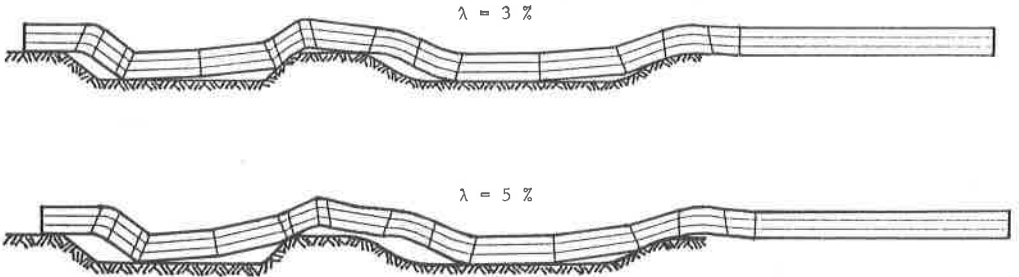


Figure 4

En second lieu, nous avons étudié un bloc d'acier soumis à une sollicitation non radiale (figure 5). Le matériau est de type RAMSBERG-OSGOOD.

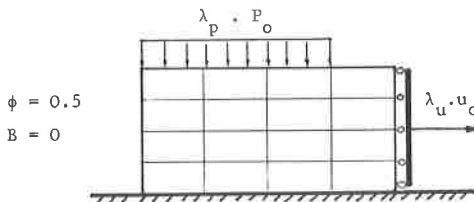


Figure 5

Pour commencer, une force verticale répartie sur les 3/4 du bord supérieur presse le bloc sur la fondation. Ensuite, cette force est maintenue constante et un déplacement uniforme horizontal est imposé sur le bord droit. Des glissements entre le bloc et la fondation apparaissent. Les contraintes de contact p et τ sont représentées pour 4 états de charge à la figure 6.

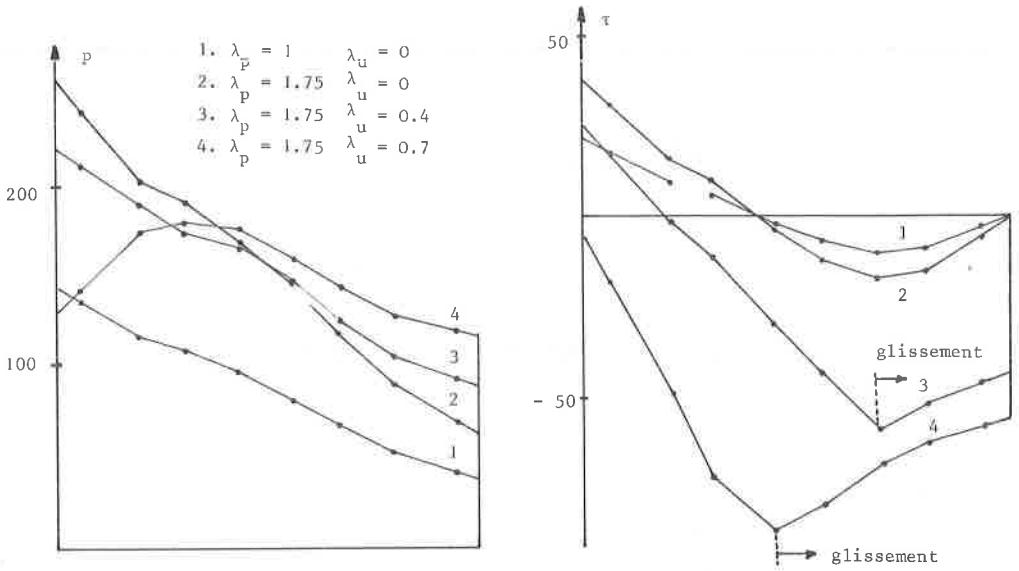


Figure 6

D'autres exemples numériques, mettant en oeuvre de très grandes déformations plastiques, sont présentés dans [5].

REFERENCES

- /1/ NGUYEN DANG HUNG, "Sur la plasticité et le calcul des états limites par éléments finis", Thèse de doctorat spécial, 1984 (Université de Liège).
- /2/ J.T. ODEN et E.B. PIRES, "Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity", J. of Applied Mech., March 1983, vol. 50, 67-76.
- /3/ R. MICHALOWSKI et Z. MROZ, "Associated and non associated sliding rules in contact friction problems", Arch. Mech. , 1978, 256-276.
- /4/ J.M.M.C. MARQUES, "Stress computation in elastoplasticity", Eng. Comput., March 1984, vol. 1.
- /5/ L. BELKIRI, R. CHARLIER et J.M. DETRAUX, "On the large deformation of axisymmetric bodies : experimental and numerical studies", Proc. of the Int. Conf. on NUMETA 85, Ed. J. MIDDLETON et al, 1985.