

**DIE BEHANDLUNG 3-DIMENSIONALER WÄRMELEITUNGSPROBLEME  
SOWIE THERMOELASTISCHER PROBLEME MIT DER FINITE  
ELEMENT METHODE**

TH.K. NAEHRIG, J.-P. GASCHEN,

*SDK Ingenieurunternehmen für spezielle Statik, Dynamik und Konstruktion,  
Lörrach, Germany*

ABSTRACT

Finite Element techniques are conveniently applied to those physical problems which can be described by means of variational problems. Since the variation integral can only be formulated directly when the functional itself has a physical meaning, the conditions for the formulation and, which is closely related, the existence of an equivalent variational problem as such are discussed.

Then the variation integral for a transient heatconduction problem is formulated, taking anisotropic material behavior and temperature dependent heatsources into account. The functionals for less complex cases can be easily derived from that. The application of the Finite Element Method (F.E.M.) is described.

Here as well as for thermoelastic problems which are treated briefly the generalized Ritz-equations are assumed to be first-order polynomials. They are applied to the basic element, a four-noded tetrahedron.

Following this part, an approach for the composition of so-called "super-elements" is presented. Averaging techniques are applied for the computation of the distribution and stiffness matrices. Using a cube as a possible super-element it is shown that absolute symmetry is guaranteed and that the deformation energy for a particular averaging technique reaches a minimal value. The treatment of the element and the admissibility of the steps taken with respect to continuity conditions are discussed.

The application of a so-called block-iterative method to large linear equation systems occuring in 3-dim. F.E. calculations is outlined, for which results have been very satisfactory.

Finally some results for a heatexchanger calculation are presented. Difficulties which arose during the calculation are pointed out and suggestions are made which will help avoid these problems in the future.

## 1. Einleitung

Im Laufe der letzten Jahre haben sich die Autoren zahlreicher Publikationen (z.B. [1],[2]) mit der Anwendung der Finite Element Methode auf rotationssymmetrische Temperaturverteilungsprobleme sowie thermoelastische Probleme beschäftigt. Fast in gleichem Masse schritt die Entwicklung auf dem Gebiet nicht-rotationssymmetrischer 3-dim. Berechnungen voran (z.B. [3],[4],[5]), wobei speziell - im Hinblick auf eine wirtschaftliche und computerorientierte Optimierung - an der Entwicklung von Elementen mit besseren physikalischen Eigenschaften gearbeitet wurde. Die Ordnung des endgültigen, zu lösenden linearen Gleichungssystems konnte dadurch erheblich verringert werden, was zweifellos ein grosser Fortschritt ist, der sich jedoch aufgrund des pro Element zu leistenden Rechenaufwandes und in manchen Fällen wegen der vergrösserten Bandbreite nicht voll auswirken kann.

Mit dieser Veröffentlichung soll im Zusammenhang mit 3-dim. Temperaturproblemen ein Beitrag zur optimalen Formulierung physikalischer Eigenschaften an einfachen Elementen sowie einer optimalen Behandlung grosser Gleichungssysteme, die bei solchen Elementen auftreten, geleistet werden. Den speziellen temperaturorientierten, praktischen Problemen wird bei der Erläuterung der Berechnungen für einen Wärmetauscher Rechnung getragen.

## 2. Das Randwertproblem und seine Darstellung als Variationsproblem

Aus der Überschrift dieses Abschnittes könnte man schliessen, dass die Behandlung des physikalischen Problems mit der F.E.M. eine Darstellung des Randwertproblems als Variationsproblem notwendig macht. Dies ist jedoch nicht der Fall. Verschiedene Möglichkeiten zur direkten Behandlung der Differentialgleichung und ihrer Randbedingungen sind gegeben. Als Beispiel kann das von Brandes vorgeschlagene, auf der Fehlerquadratmethode basierende Verfahren [6] oder das auf die diskreten Elemente angewendete Galerkin'sche Verfahren [7],[8] angeführt werden. Wird man durch die Tatsache, dass ein zum Randwertproblem äquivalentes Variationsproblem in einigen Fällen nicht existiert, das Randwertproblem sich jedoch grundsätzlich immer formulieren lässt, in der Wahl eines direkten Verfahrens bestärkt, so spricht doch eine wesentliche, allen direkten Verfahren anhaftende Begleiterscheinung dagegen. Lässt sich nämlich die Ordnung des zu behandelnden Differentialausdruckes durch mathematische Umformungen nicht reduzieren, dann wird im Vergleich zur Anwendung der F.E.M. auf Variationsprobleme die Formulierung eines Ritz-Polynomes höherer Ordnung notwendig, was in manchen Fällen unlösbare Probleme bei der Erfüllung der Rand- und Kontinuitätsbedingungen aufwirft.

Ein weiteres Argument, das für die Darstellung des physikalischen Problems als Variationsproblem spricht, ist, dass das Variationsproblem in den am häufigsten vorkommenden Fällen (u.a. thermoelastische Probleme) eine physikalische Bedeutung hat, was erlaubt, das zu minimierende Funktional direkt zu formulieren.

Für alle die Fälle, in denen eine solche direkte Formulierung nicht gelingt, und zur Abklärung der Existenz des Variationsproblems soll hier am Beispiel von Temperaturverteilungsproblemen der Zusammenhang zwischen Randwert- und Variationsproblem dargestellt werden. (vergl. [7], Teil E, §1, §19, §21)

Am zweckmässigsten geht man dabei von der allgemeinen Form des Variationsproblems aus,

$$J = \int_V F(x, y, z, T, T_x, T_y, T_z) \, dV + \int_B G(x, y, z, T) \, dB = \text{Extr.} \quad (1)$$

wobei  $T = T(x, y, z)$  im Gebiet  $V$  stetig differenzierbar,

$T_x = \frac{\partial}{\partial x} T(x, y, z)$ ,  $T_y = \frac{\partial}{\partial y} T(x, y, z)$ ,  $T_z = \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z)$  sein soll und die das Volumen einschliessende Bereichsgrenze  $B$  abschnittsweise verschiedene Randbedingungen zulassen soll. Wählt man als Ansatzfunktion

$$\bar{T}(x, y, z) = T(x, y, z) + \alpha T_1(x, y, z) \quad (2)$$

und entwickelt die Integranden des Variationsausdruckes nach Taylor, dann ergibt sich mit  $(\dots) = (x, y, z, T, T_x, T_y, T_z)$  für die einzelnen Ausdrücke:

$$F(x, y, z, \bar{T}, \bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z) = F(\dots) + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T} \alpha T_1 + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_x} \alpha T_{1x} + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_y} \alpha T_{1y} + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_z} \alpha T_{1z} + R_{n1} \quad (3)$$

$$G(x, y, z, \bar{T}) = G(x, y, z, T) + \frac{\partial G(x, y, z, T)}{\partial T} \alpha T_1 + R_{n2} \quad (4)$$

In die Integralgleichung eingesetzt, ergibt sich ein Extremum dann, wenn der nach  $\alpha$  variierte Ausdruck für  $\alpha = 0$  Null wird.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \int_V \left( \frac{\partial F(\dots)}{\partial T} T_1 + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_x} T_{1x} + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_y} T_{1y} + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_z} T_{1z} \right) dV + \\ &+ \int_B \frac{\partial G(x, y, z, T)}{\partial T} T_1 \, dB = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Mit  $u^i = (u^i v^i) - (v^i u^i)$  lässt sich Gleichung (5) derart umformen, dass sich nach Aufgliederung der Integralgleichung in zwei Teile und der innerhalb des Gebietes herrschenden Bedingung  $T_1 = T_1(x,y,z) \neq 0$  für den einen Teil die Euler'sche Differentialgleichung ergibt.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_z} \right) + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T} = 0 \quad (6)$$

Der zweite Teil kann mit dem Gauß'schen Integralsatz ([9], S.374) in die Form

$$\int_B T_1 \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_x} dy dz + T_1 \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_y} dz dx + T_1 \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_z} dx dy + \frac{\partial G(x,y,z,T)}{\partial T} T_1 dB = 0 \quad (7)$$

gebracht werden; eine Darstellung, die eindeutig auf die zum physikalischen Problem gehörenden Randbedingungen hinweist.

Im Falle fester Randbedingungen erfüllt  $T_1 = T_1(x,y,z) = 0$  die Gleichung (7); in allen anderen Fällen muss

$$\frac{\partial F(\dots)}{\partial T_x} k_x + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_y} k_y + \frac{\partial F(\dots)}{\partial T_z} k_z + \frac{\partial G(x,y,z,T)}{\partial T} = 0 \quad (8)$$

für alle  $x,y,z$  auf  $B$  erfüllt sein, wobei  $k_x, k_y, k_z$  die Richtungskosinus der auf dem Flächenelement  $dB$  stehenden Normalen sind.

Lassen sich nun geeignete Integranden  $F(\dots)$  und  $G(x,y,z,T)$  finden, die in die Gleichungen (6) und (8) eingesetzt, das Randwertproblem definieren, dann existiert ein dem Randwertproblem äquivalentes Variationsproblem. Das Auffinden dieser Integranden ist die nächste Aufgabe und gelingt bei den meisten Temperaturverteilungsproblemen verhältnismässig einfach. Stellt man die Differentialgleichung 2. Ordnung in ihrer selbstadjungierten Form - hier allgemein

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( g_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( g_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( g_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g_0 T = r \quad (9)$$

mit  $u = T(x,y,z)$ ,  $g_{11} = g_{11}(x,y,z)$ , etc. dar und vergleicht diese mit der Gleichung (6), dann sieht man, dass sich die Teilausdrücke für  $F(\dots)$  durch Integration leicht ermitteln lassen. Die Ausdrücke für  $G(x,y,z,T)$  ergeben sich entsprechend aus den Randbedingungen und der Gleichung (8).

Der Prozess lässt sich mit Hilfe der in [7], Teil E angegebenen Tabelle 21.17 verkürzen.

### 3. Die Anwendung der F.E.M. auf Temperaturverteilungsprobleme

In Anbetracht der Tatsache, dass sich die Differentialgleichungen für die verschiedenen stationären und instationären Wärmeleitungsprobleme (isotropes und anisotropes Materialverhalten, Wärmequellen) nur in der Art und Anzahl der vorkommenden Terme unterscheiden, deren Einfluss sich in der Darstellung als Variationsproblem und bei Anwendung der F.E.M. gut verfolgen lassen, wird hier nur ein möglichst allgemeiner Fall dargestellt, von dem auf alle anderen geschlossen werden kann.

Die Differentialgleichung für instationäre Wärmeleitung in anisotropen Materialien bei Berücksichtigung beliebig verteilter Wärmequellen lautet

$$\operatorname{div} (\nabla \operatorname{grad} T) + Q = c \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (10)$$

Nimmt man an, dass die in der Gleichung (10) beliebig angenommenen anisotropen Richtungen mit den Achsen des kartesischen Koordinatensystems zusammenfallen, dann ergibt sich die folgende Form,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

die im weiteren behandelt werden soll. Dabei werden mit  $\lambda = \lambda(x, y, z)$  die Wärmeleitzahlen in der durch den Index angegebenen Richtung, mit  $\rho = \rho(x, y, z)$  die Dichte des Materials und mit  $c = c(x, y, z)$  die spezifische Wärmekapazität berechnet. Die vom Ort und von der Temperatur abhängige Wärmequelle  $Q = Q(x, y, z)$  kann z.B. durch die Gleichung (12) gegeben sein.

$$Q = q_1(x, y, z) + q_2(x, y, z) T \quad (12)$$

Gilt für  $B_1 \subset B$  die Randbedingung

$$T = f(t) \quad (13)$$

für den restlichen Bereich  $B_2 \subset B$  die natürliche Randbedingung

$$-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} k_x - \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} k_y - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} k_z + \beta(T_0 - T) = 0 \quad (14)$$

wobei mit  $\beta = \beta(x, y, z)$  die Wärmeübergangszahl und mit  $T_0 = T_0(x, y, z)$  die Temperatur des angrenzenden Mediums bezeichnet wird, dann lässt sich nur für  $t = t_c$  ein zum Randwertproblem äquivalentes Variationsproblem finden.

$$J = \int_V \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \lambda_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right\} + q_1 T + \frac{1}{2} q_2 T^2 - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} T \right] dV + \int_{B_2} \beta \left( T_0 - \frac{1}{2} T \right) T dB = \text{Extrem.} \quad (15)$$

Diese Integralgleichung muss in jedem Element des nach der Finite Element Methode diskretisierten Kontinuums erfüllt sein.

Wählt man als Grundelement für 3-dim. Berechnungen den ebenflächigen Tetraeder und approximiert man die gesuchte Funktion  $T = T(x, y, z)$  durch den Ansatz

$$T(x, y, z) = \alpha_1 + (x-x_1)\alpha_2 + (y-y_1)\alpha_3 + (z-z_1)\alpha_4 = \{a_0\}^T \{\alpha\} \quad (16)$$

dann ergeben sich für dieses Element die vier Freiheitsgrade  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  und  $\alpha_4$ , die sich ebenfalls durch die in den 4 Knoten des Elementes zu ermittelnden Temperaturen  $T_i (i=1..4)$  darstellen lassen.

$$\{T_i\} = [A] \{\alpha\} \quad (17)$$

$$T(x, y, z) = \{a_0\}^T [A]^{-1} \{T_i\} = \{a_0\}^T [a_1 a_2 a_3 a_4]^T \{T_i\} \quad (18)$$

Die Kontinuitäts- und Konvergenzbedingungen sind für dieses Element und den dazugehörigen Ansatz erfüllt (vergl. z.B. [3], [5]).

Die in der Integralgleichung auftretenden Ableitungen lassen sich dann folgendermassen formulieren,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \{a_2\}^T \{T_i\} ; \frac{\partial T}{\partial y} = \{a_3\}^T \{T_i\} ; \frac{\partial T}{\partial z} = \{a_4\}^T \{T_i\} \quad (19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \{a_0\}^T [A]^{-1} \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial t} \right\} \quad (20)$$

so dass der gesamte Variationsausdruck als Funktion der unbekanntenen Knotentemperaturen erscheint. Der Ausdruck wird zwecks Erfüllung der Extremalforderung für die  $T_i$  variiert, wodurch sich für jedes Element ein lineares Gleichungssystem ergibt. Das Gleichungssystem des gesamten Problems ergibt sich durch Superposition aller Elementgleichungssysteme und erscheint hier in der folgenden Form:

$$\left( [W_x] + [W_y] + [W_z] - [Q_2] + [B_2] \right) \{T_i\} = \{Q_1\} + \{BT_0\} + [C] \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial t} \right\} \quad (21)$$

Für den Punkt 10 ( B ergeben sich dabei einzelne Anteile der Temperaturverteilungsmatrix nach den folgenden Gleichungen (M = Anzahl aller Elemente)

$$\{w_x\}_{10} = \sum_{n=1}^M \{a_2\}_n^T * \{a_2\}_n^T \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial T_{10}} \right\} \int_{V_n} \lambda_x \, dV \quad (22)$$

$$\{\bar{q}_2\}_{10} = \sum_{n=1}^M \int_{V_n} q_2 \{a_0\}_n^T [A]^{-1} * \{a_0\}_n^T [A]^{-1} \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial T_{10}} \right\} \, dV \quad (23)$$

$$\{b_2\}_{10} = \sum_{n=1}^M \int_{(B_2)_n} \beta \{a_0\}_n^T [A]^{-1} * \{a_0\}_n^T [A]^{-1} \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial T_{10}} \right\} \, dB \quad (24)$$

Die Behandlung des instationären Problems wird möglich, wenn man den zeitlichen Verlauf nach dem von Crank-Nicolson (Differenzenverfahren) vorgeschlagenen Ansatz diskretisiert,

$$\{T_i\}_t - \{T_i\}_{t-\Delta t} = \left( \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial t} \right\}_{t-\Delta t} + \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial t} \right\}_t \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (25)$$

und das sich damit ergebende Gleichungssystem (26) für alle t durch Iteration löst.

$$\begin{aligned} & \left( [W_x] + [W_y] + [W_z] - [Q_2] + [B_2] - \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{T_i\}_t = \\ & = \{Q_1\} + \{BT_0\} - [C] \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial t} \right\}_{t-\Delta t} - \frac{2}{\Delta t} [C] \{T_i\}_{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (26)$$

#### 4. Die Anwendung der F.E.M. auf thermoelastische Probleme

Da die Theorie für elastische wie auch für thermoelastische Probleme in fast jeder einschlägigen Literatur ausführlich behandelt ist und sich ausserdem prinzipiell nicht von der für Temperaturverteilungsprobleme unterscheidet, soll in diesem Kapitel nur das Nötigste dargestellt werden.

Untersucht wird die allgemeine Differentialgleichung des thermoelastischen Problems unter Berücksichtigung von Massenkräften [10], S.136.

$$G \left[ \Delta \{u\} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \{u\} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_t \text{ grad TB} \right] + \{K\} = 0 \quad (27)$$

(mit:  $G$  = Schubmodul,  $\nu$  = Querkontraktionszahl,  $\alpha_t$  = Wärmeausdehnungskoeffizient,  $TB = TB(x,y,z)$  die auf eine Basistemperatur bezogene Temperaturdifferenz).

Nimmt man an, dass die Spannungen entlang der Bereichsgrenze  $B$  Null sind, dann ergibt sich folgendes Variationsintegral, dessen Wert mit der potentiellen Energie des Systems identisch ist.

$$J = \pi = \int_V \left( -\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_T\} + \{K\}^T \{u\} \right) dV = \text{Extr.} \quad (28)$$

Der durch die Temperatur erzeugte Eigenspannungszustand wird in der bekannten Weise behandelt, indem man zunächst in der Gleichung (28)  $\{\sigma_T\}$  durch  $\{\bar{\sigma}_T\}$  ersetzt.

$$\{\bar{\sigma}_T\} = -\{\sigma_T\} = \frac{E}{1-2\nu} \alpha_t TB \{\delta\} \quad (29)$$

( $\{\delta\}$  = Kroneckadelta)

Wird hier wie im Kapitel 3 dasselbe Element zur Diskretisierung des Kontinuums benutzt, dann erfüllt der Ansatz

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [A_0] \{\alpha\} \quad (30)$$

mit

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + (x-x_1) \alpha_2 + (y-y_1) \alpha_3 + (z-z_1) \alpha_4 \\ v &= \alpha_5 + (x-x_1) \alpha_6 + (y-y_1) \alpha_7 + (z-z_1) \alpha_8 \\ w &= \alpha_9 + (x-x_1) \alpha_{10} + (y-y_1) \alpha_{11} + (z-z_1) \alpha_{12} \end{aligned} \quad (31)$$

alle notwendigen Bedingungen.

Die Gleichung (30) lässt sich als Funktion der Knotenverschiebungen darstellen.

$$\{u\} = [A_0] [A_e]^{-1} \{u_1\} \quad (32)$$

Damit ergibt sich für die Dehnungen und Spannungen,

$$\{\epsilon\} = [\psi] [A_e]^{-1} \{u_i\} \quad (33)$$

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\} = [H] [\psi] [A_e]^{-1} \{u_i\} \quad (34)$$

so dass auch hier ein von unbekanntem Knotenwerten abhängiges Variationsintegral entsteht.

Nach Variation der Knotenverschiebungen und Superposition der Elementmatrizen und Knotenkräfte wird das Gleichungssystem, das hier in der Form

$$[KST] \{u_i\} = \{RHS_T\} + \{RHS_K\} \quad (35)$$

erscheint, nach einem der in Kapitel 6 genannten Verfahren gelöst. Bei der abschliessenden Ermittlung der Spannungen muss den besonderen Eigenarten des hier vorliegenden Eigenspannungszustandes wieder Rechnung getragen werden.

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\} - \{\bar{\sigma}_T\} \quad (36)$$

#### 5. Die Berücksichtigung physikalischer Eigenschaften beim Aufbau einfacher hexaedrischer Elemente

Alle im Räumlichen auftretenden Elemente, wie die Pyramide, dreiseitige Prismen und beliebig geformte Hexaeder, können aus dem bereits oben erwähnten Grundelement, dem ebenflächigen Tetraeder, aufgebaut werden. Dabei erhebt sich sofort die Frage nach dem Aufbau, der die physikalischen Eigenschaften dieser "Superelemente" am besten repräsentiert und der zusätzlich eine wirtschaftliche Berechnung der Steifigkeitsmatrizen für diese Elemente gewährleistet. Die Gedanken, die im Falle isotroper Materialien zu dem vorteilhaftesten Aufbau bzw. zur Aufteilung eines Superelementes führen, sollen hier am Beispiel eines symmetrischen Hexaeders (Kubus) erläutert werden.

Die Anzahl aller möglichen Aufteilungsarten wurde durch zwei Bedingungen eingeschränkt. Die erste Bedingung fordert, dass die Anzahl der nicht eliminierbaren Knoten pro Element möglichst klein ist. Versteht man unter nicht eliminierbaren Knoten diejenigen, die aufgrund ihrer Lage eine von der Verschiebung d.h. von der Lösung abhängige Kraft auf das benachbarte Element zu übertragen haben, dann ist das Knotenminimum identisch mit der Anzahl der Eckpunkte des Elementes.

Die zweite Bedingung trägt dem Kriterium Rechnung, dass benachbarte Tetraeder möglichst von gleicher Grösse und von gedrungener Gestalt sein sollen.

Für diese beiden Bedingungen liessen sich zwei grundsätzlich verschiedene Aufteilungsarten finden. Bei der einen teilt man den Kubus in dreiseitige Prismen (vergl. auch [3],[4]), bei der anderen entstehen durch Einführung des Knotenschwerpunktes als zusätzlichen Punkt im Innern des Elementes, der vor Einspeicherung der Elementmatrix in die Systemmatrix wieder eliminiert wird, 6 Pyramiden, die sich jeweils in Tetraeder aufspalten lassen.

Die einzelnen Typen jeder Aufteilungsart unterscheiden sich durch die Anzahl der im Zusammenhang mit der Ermittlung der Steifigkeiten berechneten Tetraeder. Lässt sich ein Kubus im Falle der ersten Art in nicht mehr als  $2 * 3 = 6$  (Typ 1) und im Falle der zweiten in nicht mehr als  $6 * 2 = 12$  Tetraeder (Typ 4a) aufspalten, dann ergeben sich grundsätzlich andere Elemente nur durch mehrmaliges Rechnen des jeweils anders aufgeteilten Elementes und anschliessender Mittelbildung (1. Art - Typ 2, 3; 2. Art - Typ 4 (Abb.1)). Die Zulässigkeit dieses Verfahrens wird weiter unten behandelt.

Diese Elemente sollen jetzt nach physikalischen Gesichtspunkten miteinander verglichen werden.

Betrachtet man einen homogenen und absolut isotropen Kubus, dessen Tragverhalten unter symmetrischer Belastung ganz sicher auch wieder symmetrisch ist, dann muss die diese Struktur beschreibende Steifigkeitsmatrix - unabhängig von dem zur Ermittlung verwendeten Verfahren - ganz bestimmte Eigenschaften haben. Einerseits müssen alle Hauptglieder der Matrix denselben Wert annehmen, und andererseits müssen die infolge einer Einheitsverschiebung an symmetrischen Knoten entstehenden Kräfte wirklich gleich sein.

Für die hier untersuchten Elemente ist diese wesentliche Bedingung nur bei den Typen 3 und 4 erfüllt, was dem Schaubild und der Spalte 1 der in der Abb. 2 dargestellten Tabelle leicht zu entnehmen ist. Stellt man nämlich die Hauptglieder der Steifigkeitsmatrizen in der der Abb. 2 zu entnehmenden Weise graphisch dar, dann müssen bei Erfüllung der physikalischen Bedingung alle zu einem Element gehörenden Punkte in einer horizontalen Ebene liegen. Die Gleichheit der infolge einer Einheitsverschiebung entstehenden Kräfte - hier mit Symmetrie bezeichnet - ist damit auch gewährleistet.

Über die physikalische Güte einer Aufteilung lässt sich eine weitere Aussage machen. Da sich jedes in der Natur vorkommende Material unter Belastung nach dem Prinzip des kleinsten Zwanges verhält, liefert auch derjenige Ansatz und diejenige Aufteilung die besten Ergebnisse, für die

die im gesamten Element geleistete Formänderungsarbeit am kleinsten wird. Betrachtet man bei einem Kubus den Mittelwert aller Hauptglieder als ein Mass für diese Formänderungsarbeit, dann ergeben sich für den Elementtyp 4 klare Vorteile. Weitere Gründe, die für die Wahl dieses Elementtypes sprechen, sind einerseits mathematischer und andererseits wirtschaftlicher Natur. So ergibt sich zum Beispiel für die in der Spalte 7 (Abb. 2, Tabelle) dargestellte Verhältnisgrösse, die eine Aussage über die Konditionierung der Steifigkeitsmatrix und damit über die Konditionierung des zu lösenden Gleichungssystems macht, für den Elementtyp 4 der kleinste und damit beste Wert. Wirtschaftlich von Bedeutung ist die Anzahl der Tetraeder, die zur Erstellung einer "symmetrischen" Matrix gerechnet werden müssen. Beim Elementtyp 4 sind es 24 Tetraeder, beim Elementtyp 3 hingegen mehr als die doppelte Anzahl.

Abschliessend soll kurz auf die Zulässigkeit des dem Elementtyp zugrunde gelegten Aufteilungsverfahrens und die eng damit verbundenen Fragen der Kontinuität zwischen den hexaedrischen Elementen eingegangen werden. Dazu wird der Kubus zunächst in  $1 * 24$  Tetraeder aufgeteilt, was im Vergleich zum Typ 4 durch die Einführung von zusätzlichen Knoten in der Mitte der Aussenfläche gelingt. Da die Kontinuitäts- und Konvergenzfragen für diese Aufteilung abgeklärt sind, stellt sich somit die Aufgabe, die für dieses Element ermittelte Steifigkeitsmatrix auf die Steifigkeitsmatrix des Elementtyps 4 zurückzuführen. Das gelingt unter Einführung von Zwangsbedingungen, von denen hier nur die wesentlichste, über die sich auch eine Aussage im Hinblick auf die Kontinuität machen lässt, genannt werden soll.

Die vier in den Eckpunkten einer Elementfläche ermittelten Lösungsvektoren müssen eine Ebene aufspannen.

Wählt man also die Elementaufteilung klein genug, so dass der in einer Struktur auftretende Verschiebungsverlauf unter dieser Bedingung approximiert werden kann, dann ist auch die Kontinuität gewährleistet.

## 6. Das Block-iterative Verfahren

Die Koeffizientenmatrizen der bei Temperaturverteilungsproblemen wie auch bei thermoelastischen Problemen auftretenden linearen Gleichungssysteme zeichnen sich durch eine Bandstruktur aus und sind ausserdem symmetrisch und positiv definit. Das lässt die Anwendung der verschiedensten Lösungsverfahren zu, von denen hier lediglich

- 1) Gauß-Seidel mit over-relaxation
- 2) Cholesky-Zerlegung
- 3) Block-iteratives Verfahren

erwähnt werden sollen, die, abhängig von der Art und Grösse des Problems, bei der SDK zum Einsatz kommen. Die ersten zwei Verfahren sind wohlbekannt. Das dritte Verfahren wurde in seiner allgemeinen Form auch schon von Varga ([11], §3 etc.) behandelt. Auf Finite Element Probleme angewendet, lassen sich Vorzüge besonders bei der Behandlung 3-dim. statischer Probleme erkennen, die hier kurz zusammen mit dem Rechengang dargestellt werden sollen.

Es liegt z.B. die oben beschriebene Diskretisierung des Kontinuums unter Verwendung eines linearen Ritz-Ansatzes zugrunde. Pro Knoten ergeben sich dann die 3 Freiheitsgrade  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$ . Reorganisiert man die für die Cholesky-Zerlegung übliche Koeffizientenspeicherung (Abb. 3, oben) für das Block-iterative Verfahren so, dass sich die Koeffizienten, die eine Verschiebung in  $j$ -Richtung mit einer Kraft in  $i$ -Richtung koppeln, zu Blöcken  $\alpha_{ij}$  zusammenfassen lassen (Abb. 3, unten), dann ergibt sich ein Gleichungssystem mit 3 vektoriellen Unbekannten. Dieses System wird mit dem Verfahren nach Pkt. 1 gelöst, wobei die notwendigen Korrekturvektoren  $\Delta v_x$ ,  $\Delta v_y$  und  $\Delta v_z$  nach Cholesky durch Zerlegung der symmetrischen und positiv definiten Untermatrizen  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$  und  $\alpha_{zz}$  berechnet werden.

Folgende Vorzüge lassen sich bei der Anwendung dieses Verfahrens erkennen:

- 1) Für die gebräuchlichsten Materialien (Querkontraktionszahl  $\nu$ !) werden die wesentlichen Nebenglieder einer Gleichung bei der Lösung der Teilsysteme nach Cholesky berücksichtigt. Das bewirkt, dass die beim ersten Schritt erzielte Lösung bereits eine relativ gute Approximation der endgültigen Lösung ist.
- 2) Die Bandbreite der behandelten Untermatrizen ist nur  $1/3$  von der der gesamten A-Matrix, eine Tatsache, die darauf hinweist, dass das Verfahren besonders gut für sehr grosse Gleichungssysteme (Freiheitsgrade  $f = 3$  pro Knoten, max. ungefähr 8000 Knoten, d.h. 24000 Unbekannte, halbe Bandbreite 900) geeignet ist.
- 3) Die Vorzüge des Verfahrens nach Pkt. 1 (absolutes Minimum von Nullmultiplikationen) können genutzt werden.
- 4) Die Konvergenzrate ist sehr gut. Für  $\nu = 0.3$ , 4000 Knoten,  $f = 3$  und einer halben Bandbreite von 700 (Matrix A) konnte in 5 Iterationen die Summe der absoluten Residuen auf  $1/10$  reduziert werden.

## 7. Berechnung eines Wärmetauschers

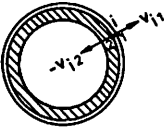
Als Anwendungsbeispiel soll ein Wärmetauscher dienen, der vor gut einem Jahr berechnet wurde. Im Hinblick auf das Thema dieses Beitrages erfüllt dieses Beispiel nicht alle Forderungen, denn die Temperaturverteilung wurde dazu nicht ermittelt, es warf jedoch einige praktische, temperaturorientierte Probleme auf, die hier dargestellt werden sollen. Die Geometrie des zur Mittelebene symmetrischen Körpers ist der Abb. 4 zu entnehmen. Für den idealisierten, rotationssymmetrischen Körper wurden zunächst für den Betriebszustand sowie für verschiedene Anfahrzustände, die sich jeweils aus Innendruck und Temperaturbelastung zusammensetzen, Finite Element Berechnungen durchgeführt. Ferner wurde untersucht, wie sich für den Betriebszustand die Tragverhältnisse bei einer Variation der "tubesheet"-Dicke ändern. Ziel der Berechnung war es:

- 1) Die kritischen Punkte und die in ihnen vorhandenen Sicherheiten gegenüber Temperaturkriechen und Sprödbruch zu ermitteln,
- 2) die technisch und wirtschaftlich optimalste Lösung zu finden,
- 3) Aussagen über die Anfahrbedingungen des Wärmetauschers zu machen und
- 4) Randbedingungen und eine Vorlösung für das iterativ zu lösende 3-dim. Detailproblem zu liefern.

In Abb. 5 sind einige Ergebnisse dieser Berechnungen dargestellt. In die Struktur wurden die Niveaukurven für die Sicherheitskoeffizienten eingetragen, die sich in diesem Fall aus dem Verhältnis von Fließgrenze und der nach Mises ermittelten Vergleichsspannung ergeben. Über dem "tubesheet" sind Grösse und Verteilung der in den Rohren wirkenden Kräfte dargestellt. Die kritischen Punkte im Behälter und "tubesheet" lassen sich mit einem Blick erkennen, was auch im Fall der Rohre zutrifft, wenn man das Mass für die kritische Knicklast (z.B. nach Engesser-Kármán) in die Darstellung für die Rohrkräfte einträgt.

Eines der von uns gerechneten 3-dim. Details sowie die Aufteilung in diskrete Elemente ist in Abb. 6 zu sehen. Trotz der verhältnismässig kleinen Anzahl von Unbekannten musste hier iterativ gelöst werden, und zwar wegen der zwischen Rohr und "tubesheet" herrschenden Verhältnisse. Die zwischen beiden Teilen wirkenden Kräfte sind verformungsabhängig.

Die Randbedingungen wurden wie folgt definiert:



$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta v_i = v_{i1} - v_{i2} > 0 \quad & v_{i1} \neq v_{i2} \\ & k_{i1} = k_{i2} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \Delta v_i = v_{i1} - v_{i2} \leq 0 \quad & v_{i1} = v_{i2} \\ & k_{i1} = -k_{i2} \begin{cases} = 0 \text{ f\u00fcr } \Delta v = 0 \\ \neq 0 \text{ f\u00fcr } \Delta v < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

die Stelle i ist durch Knoten 1 und 2 definiert

Der iterative Prozess wurde vor Erreichen der vollen Konvergenz abgebrochen, und zwar zu dem Zeitpunkt, in dem wir eine hinreichende Aussage \u00fcber Gr\u00f6ssenordnung und Verteilung der Spannungen sowie \u00fcber die sich einstellenden Sicherheiten machen konnten. Als Mass f\u00fcr die Genauigkeit dienten dabei die Residuen des Gleichungssystems. Zwar werden die Fehler, die sich infolge des Differenzierens der L\u00f6sung f\u00fcr die Spannungen einstellen, etwas gr\u00f6sser, doch scheint das Ausmass bedingt durch die Art des L\u00f6sverfahrens klein zu sein.

Die letzte Abbildung, Abb. 7, stellt charakteristische, in einigen Punkten ermittelte Spannungen dar.

Die bei der thermoelastischen Berechnung aufgetretenen Probleme lassen sich in zwei Gruppen aufteilen, n\u00e4mlich die, welche allgemein bei allen derartigen Problemen (z.B. Temperatur, Vorspannung) auftreten, und die, welche sich besonders bei Verwendung von iterativen L\u00f6sverfahren bemerkbar machen k\u00f6nnen. Die Ursache f\u00fcr Probleme der ersten Gruppe ist in der Tatsache zu suchen, dass unter Temperatur sogenannte Eigenspannungszust\u00e4nde auftreten. Nicht die Verschiebungen infolge der Temperaturkr\u00e4fte sind Grundlage f\u00fcr die Spannungsermittlung, es ist vielmehr die Verschiebungsdifferenz, die sich aus dem unbehinderten und dem elastisch gerechneten Verformungszustand ergibt. Die Werte, die sich dabei f\u00fcr die einzelnen Summanden ergeben, haben besonders bei verh\u00e4ltnism\u00e4ssig weichen Konstruktionen und hohen Temperaturen fast die gleiche Gr\u00f6sse, so dass die zu ermittelnde Spannung sich aus Werten ergeben kann, die im Genauigkeitsbereich (U 1108, single precision) der numerischen Berechnung liegen. Im allgemeinen trifft auch zu, dass die f\u00fcr Temperatur ermittelten Knotenkr\u00e4fte wesentlich gr\u00f6sser sind als die Kr\u00e4fte f\u00fcr Innendruck, so dass bei gemeinsamer Behandlung beider Lastf\u00e4lle ohne weiteres der Einfluss des Innendruckes numerisch verloren gehen kann oder stark verf\u00e4lscht werden kann. Eine M\u00f6glichkeit zur \u00dcberwindung dieses Problems ist durch Heraufsetzen der Bezugstemperatur gegeben, ein Schritt, der sich in vielen F\u00e4llen auch bei unterschiedlichen W\u00e4rmedehnzahlen durchf\u00fchren l\u00e4sst, wobei dann die Differenz der W\u00e4rmedehnzahlen durch eine fiktive Tempe-

raturerhöhung dargestellt werden muss,

$$\Delta\alpha_t T_1 = \alpha_{Bt} T_{1,F} \quad (38)$$

( $T_1$  = vorhandene Temperatur;  $\alpha_{Bt}$  = bezogene Wärmedehnzahl;  $T_{1,F}$  = die für  $T_1$  gültige fiktive Korrektur)

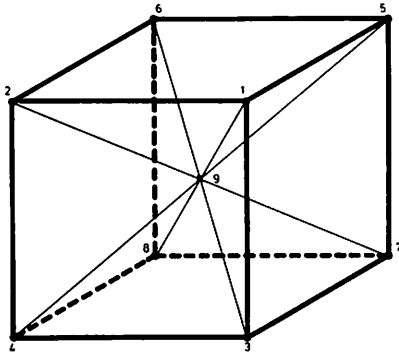
und der bei geringen Temperaturunterschieden in hohen Temperaturbereichen sehr gute Verbesserungen mit sich bringt. Eine andere Möglichkeit ist, die Lastfälle getrennt zu behandeln, was jedoch bei Verlassen des elastischen Bereichs nicht mehr so ohne weiteres möglich ist, da das Superpositionsprinzip seine Gültigkeit verliert.

Die bei der zweiten Gruppe auftretenden Schwierigkeiten haben ihre Ursache nicht in der Grösse der Temperaturkräfte, sondern vielmehr darin, dass die Kräfte quasi paarweise an Knoten mit sehr unterschiedlichen Knotennummern auftreten können. Fehlt im Falle eines Systems, das in einer Richtung verhältnismässig weich ist, eine gute Vorlösung, dann wird man grosse Schwierigkeiten mit der Konvergenz der Lösung haben. Ähnliche Effekte treten infolge sprunghafter Änderungen von Elastizitätsmoduln oder physikalisch inkompatibler, vorgegebener Temperaturverteilungen auf. Dieses Problem kann bewältigt werden, indem man das System in Bezug auf die weiche Richtung in der Nähe der Verschiebungs-Null-Linie festlegt und dafür löst. Bildet man am ursprünglichen System die Residuen, so sollten diese erstens klein und zweitens leicht korrigierbar sein.

LITERATUR

- 1 RASHID, Y.R., "Finite Element Analysis of Axisymmetric Composite Structures", AEC Research and Development Report, 1965
- 2 WILSON, E.L., NICKEL, R.E., "Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis", Nuclear Eng. and Design 4, 1966
- 3 ZIENKIEWICZ, O.C., CHEUNG, Y.K., "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", McGraw Hill, 1967
- 4 ARGYRIS, J., "Aska-Automatic System for Kinematic Analysis", Nuclear Eng. and Design 10, 1969
- 5 HOLAND, I., BELL, K., "Finite Element Methods in Stress Analysis", Tapir Verlag, 1970
- 6 BRANDES, K., "Diskrete Fehlerquadratmethode und Finite Element Methode", Nuclear Eng. and Design 10, 1969
- 7 SAUER, R., SZABO, I., "Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil II", Springer Verlag, 1969
- 8 ZURMÜHL, R., "Praktische Mathematik", Springer Verlag, 1965
- 9 BRONSTEIN-SEMENDJAJEW, "Taschenbuch der Mathematik", Verlag Harri Deutsch, 1964
- 10 SZABO, I., "Höhere Technische Mechanik", Springer Verlag, 1960
- 11 VARGA, R., "Matrix Iterative Analysis", Prentice Hall, Inc., Series of Automatic Computation, 1962

# Aufteilung eines symmetrischen hexaedrischen Elementes.



Typ 4:  
9 Knoten, 2x12 Tetraeder.

*Alle Parameter, die in den mit ● gekennzeichneten Knoten formuliert sind, erscheinen als Unbekannte in der endgültigen System-Matrix.*

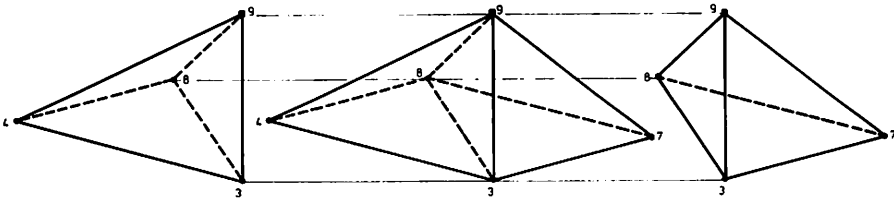
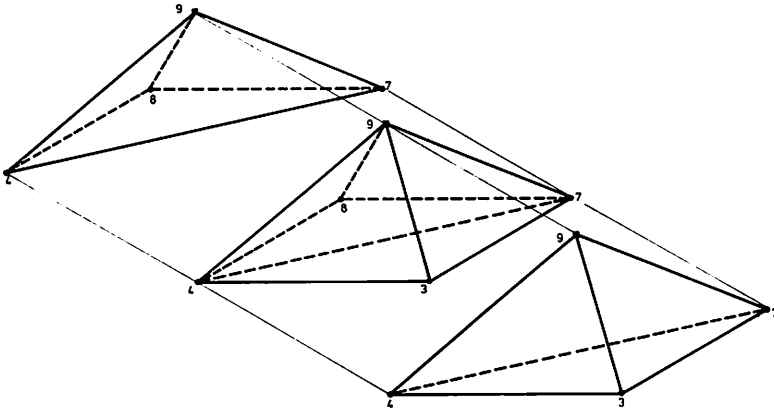
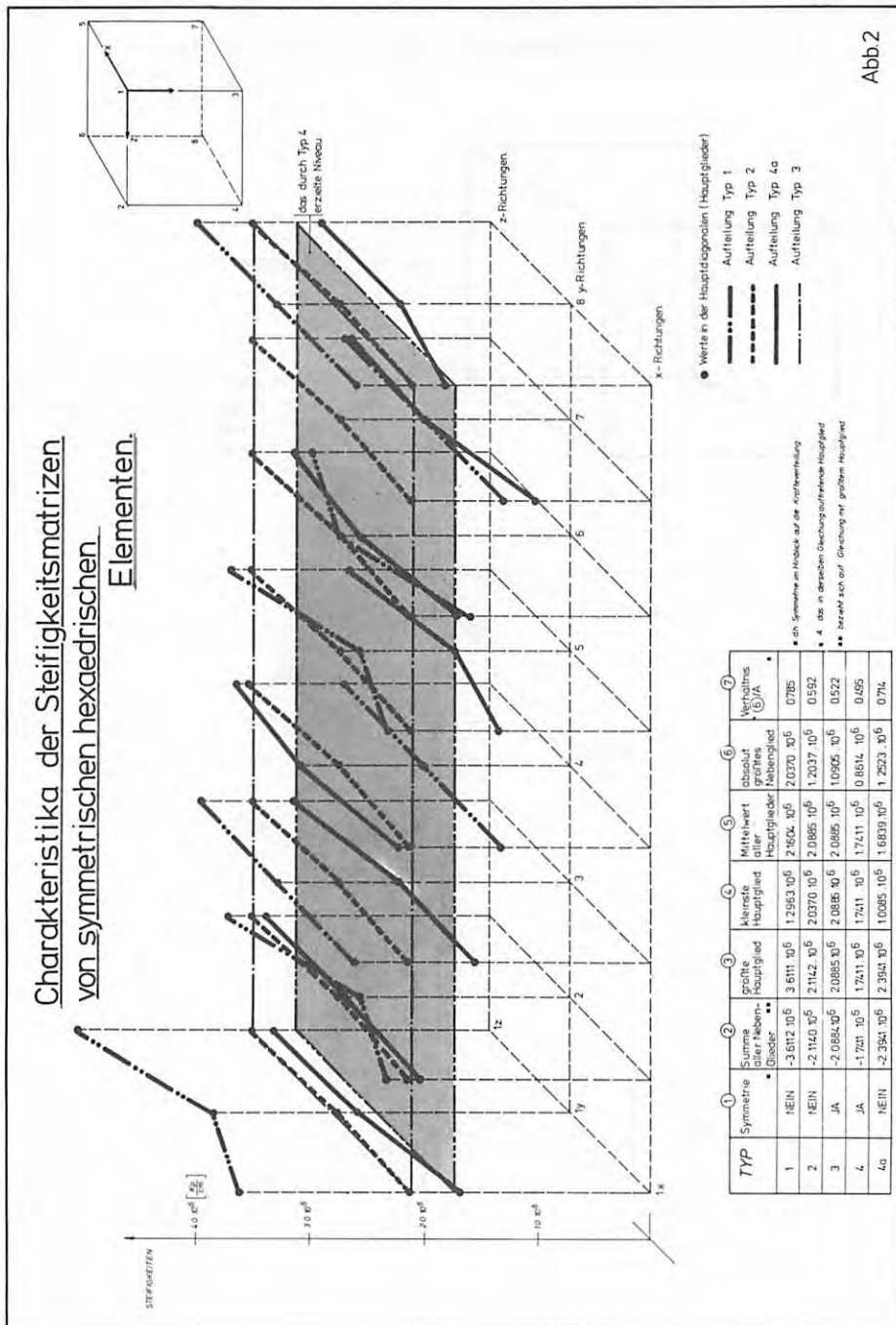


Abb.1

## Charakteristika der Steifigkeitsmatrizen von symmetrischen hexaedrischen Elementen.



Typ	Symmetrie	2		3		4		5		6		7
		Summe aller Neben-Glieder	Summe aller Neben-Glieder	größte Hauptglied	kleinste Hauptglied	Mittelwert aller Hauptglieder	absolut größtes Nebenglied	Verhältnis $\frac{7}{6} \cdot \frac{5}{4}$				
1	NEIN	-3,612 · 10 <sup>6</sup>	3,611 · 10 <sup>6</sup>	1,2963 · 10 <sup>6</sup>	2,6204 · 10 <sup>6</sup>	2,0370 · 10 <sup>6</sup>	2,0885 · 10 <sup>6</sup>	2,0885 · 10 <sup>6</sup>	1,2037 · 10 <sup>6</sup>	0,785	0,952	0,522
2	NEIN	-2,1140 · 10 <sup>6</sup>	2,1142 · 10 <sup>6</sup>	2,0885 · 10 <sup>6</sup>	2,0885 · 10 <sup>6</sup>	2,0885 · 10 <sup>6</sup>	2,0885 · 10 <sup>6</sup>	2,0885 · 10 <sup>6</sup>	1,0905 · 10 <sup>6</sup>	0,522	0,455	0,714
3	JA	-2,0884 · 10 <sup>6</sup>	2,0885 · 10 <sup>6</sup>	1,7411 · 10 <sup>6</sup>	1,7411 · 10 <sup>6</sup>	1,7411 · 10 <sup>6</sup>	1,7411 · 10 <sup>6</sup>	1,7411 · 10 <sup>6</sup>	0,8654 · 10 <sup>6</sup>	0,455	0,714	0,455
4	JA	-1,7201 · 10 <sup>6</sup>	1,7411 · 10 <sup>6</sup>	2,3944 · 10 <sup>6</sup>	1,0085 · 10 <sup>6</sup>	1,6819 · 10 <sup>6</sup>	1,2523 · 10 <sup>6</sup>	1,2523 · 10 <sup>6</sup>	0,714	0,714	0,714	0,714

Abb.2

### Matrix Coefficients Arrangement for Cholesky Solution

$$[A] \cdot \{V\} = \{F\}$$

$$\{V\}^T = \{V_1^x, V_1^y, V_1^z, V_2^x, V_2^y, V_2^z, \dots, V_n^x, V_n^y, V_n^z\}$$

$$\{F\}^T = \{F_1^x, F_1^y, F_1^z, F_2^x, F_2^y, F_2^z, \dots, F_n^x, F_n^y, F_n^z\}$$

### Matrix Coefficients Arrangement for Block-Iterative Solution

$$[\bar{A}] \cdot \{\bar{V}\} = \{\bar{F}\}$$

$$\{\bar{V}\}^T = \{V_1^x, V_2^x, \dots, V_n^x, V_1^y, V_2^y, \dots, V_n^y, V_1^z, V_2^z, \dots, V_n^z\}$$

$$\{\bar{F}\}^T = \{F_1^x, F_2^x, \dots, F_n^x, F_1^y, F_2^y, \dots, F_n^y, F_1^z, F_2^z, \dots, F_n^z\}$$

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}$$

Abb. 3

# GEOMETRIE des WÄRMETAUSCHERS.

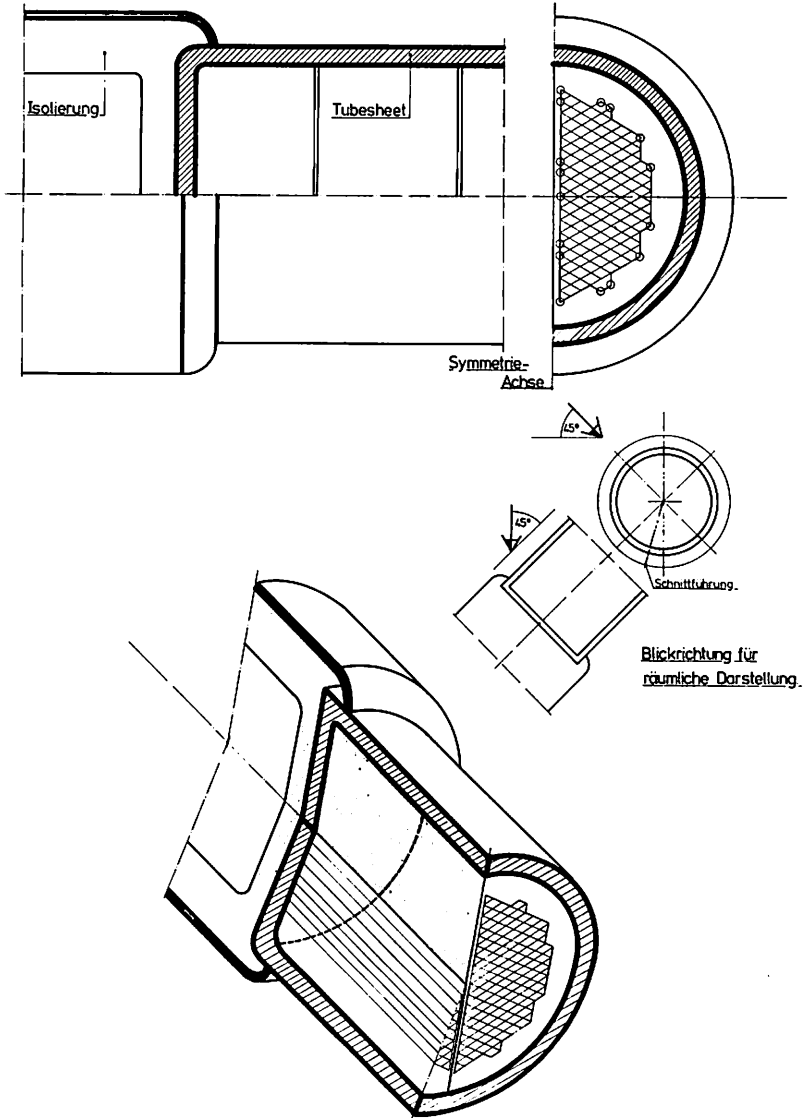


Abb.4

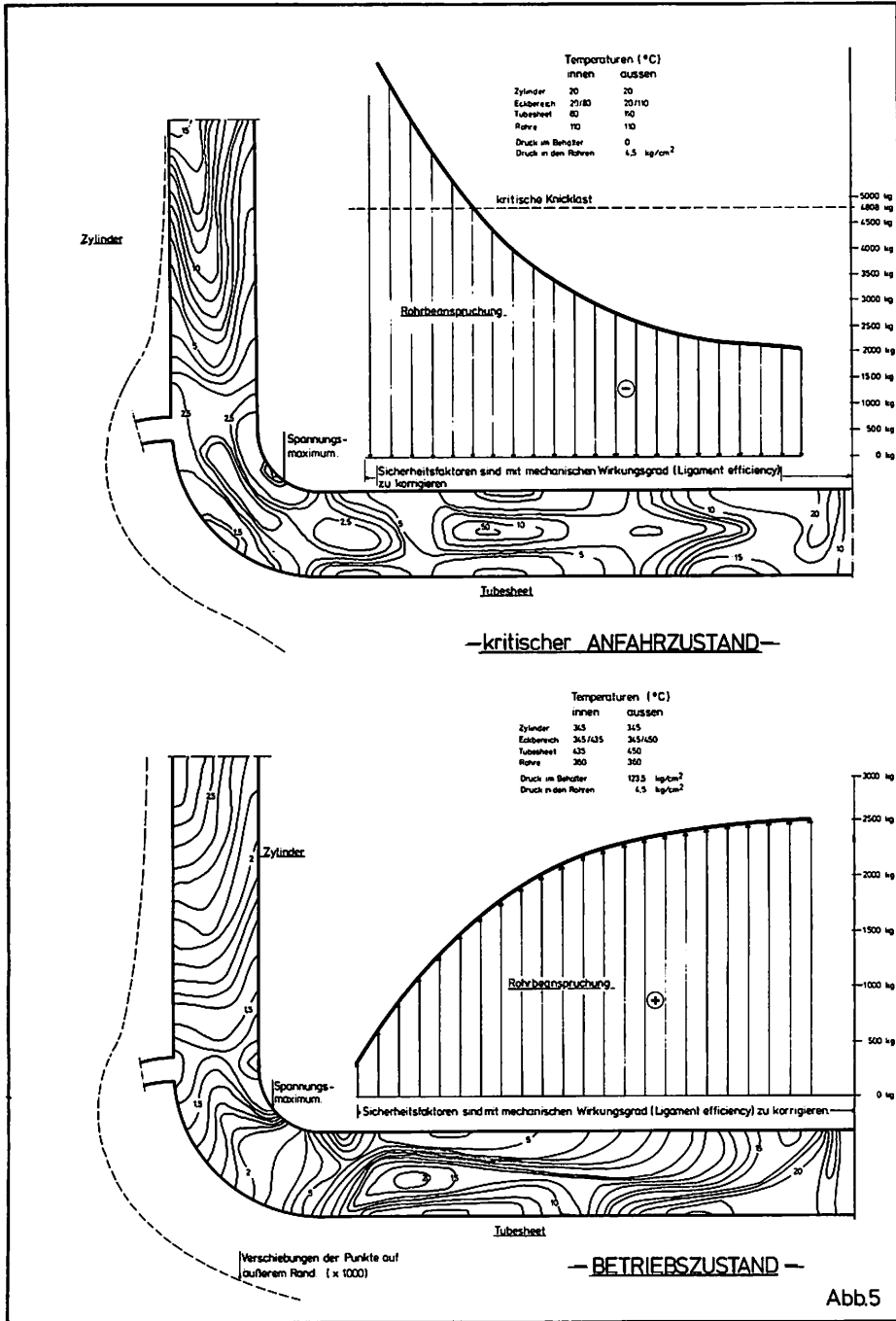
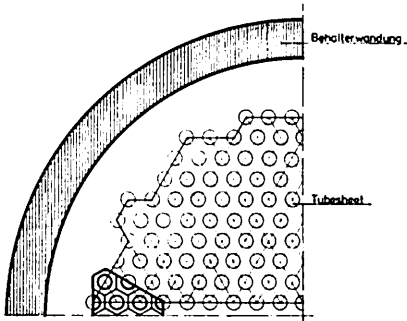
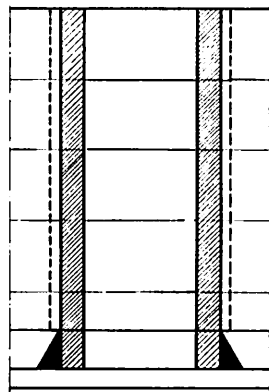


Abb.5

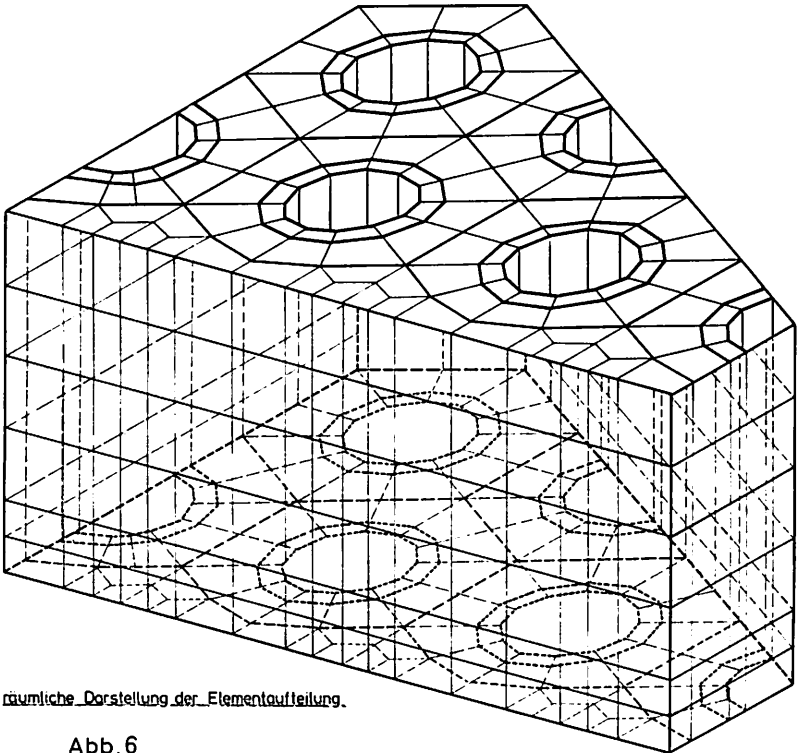
## BERECHNUNG des KRITISCHEN DETAILS.



Geometrie



Längsschnitt durch Tubesheet  
im Rohrbereich.



räumliche Darstellung der Elementaufteilung.

Abb. 6

# Darstellung der Spannungen in einigen charakteristischen Elementen

## Wärmetauscher-Detailberechnung

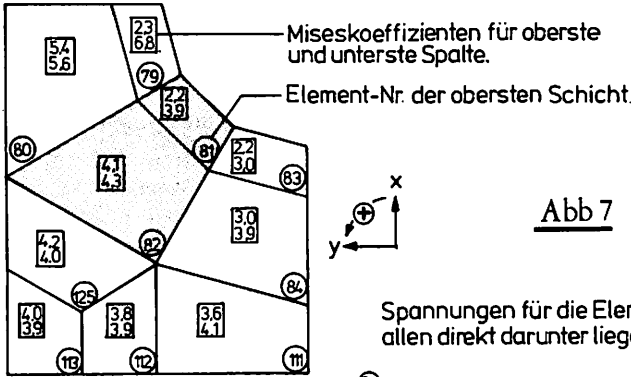
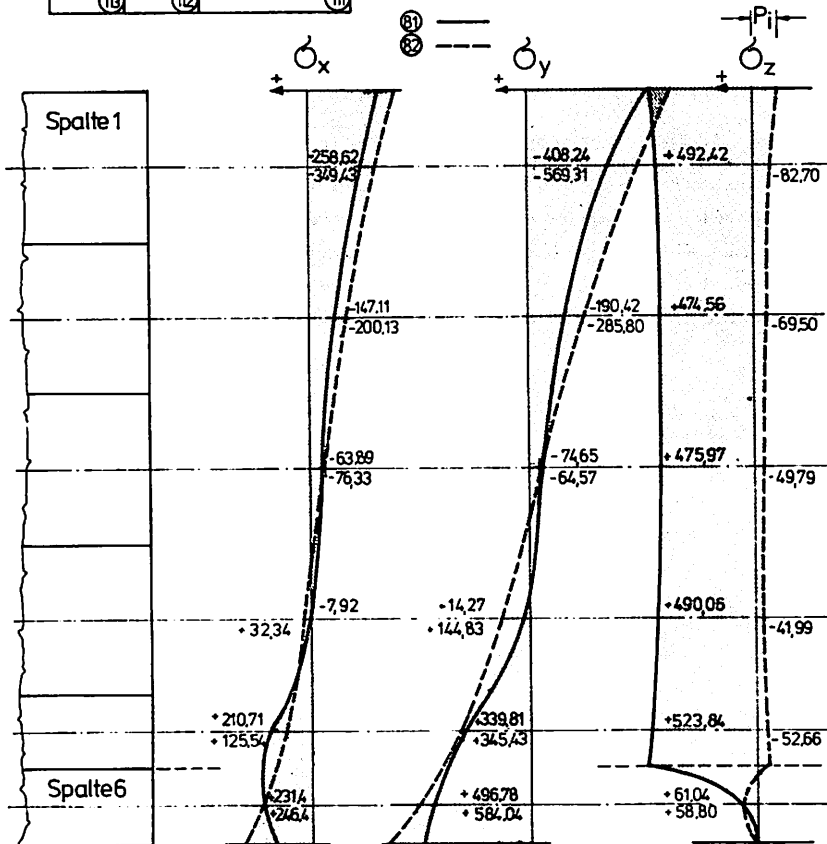


Abb 7

Spannungen für die Elemente 81, 82 und allen direkt darunter liegenden Elementen.



Z. ZUDANS, U. S. A.

**Q** Describe the type of element used for this analysis. Was it a hexahedron with 8 nodal points ?

Th. NAEHRIG, Germany

**A** The type of element used for the analysis of temperature distribution and thermo-elastic problems is presented in the paper. Because of the limited time I did not present this part of the paper here.

We use a hexahedron element with 8 nodes. It is, however, a superstructure. The basic element is the tetrahedron.

P. KASSOVIC, France

**Q** Were interaction between inlet and outlet tube-sheets, different thermal gradients in them and differential thermal expansion between tubes and shell taken into account and how ?

Th. NAEHRIG, Germany

**A** In the pictures shown in the paper, only half of the structure is drawn. The axisymmetric calculation was carried out for the entire structure, so that interaction between inlet and outlet tube-sheets as well as different conditions could be taken into consideration. In this case thermal expansion coefficients for tubes and shell were the same, but it does not cause any difficulties if they are different. Tubes were considered to be one-dimensional finite elements.