GRENZTRAGFÄHIGKEITS-ANALYSE - VERBINDUNG STATISTISCHER METHODEN (MONTE CARLO METHODE) MIT DER FINITE ELEMENT ANALYSIS Z.B. FÜR DIE BRUCHBERECHNUNG VON SPANNBETON-REAKTORDRUCKGEFÄSSEN

H.H. HOFMANN,

SDK Ingenieurunternehmen für spezielle Statik, Dynamik und Konstruktion, Lörrach, Germany

ABSTRACT

The problems arising in failure analysis using three-dimensional finite element analysis are summarized. A different path is drawn to avoid some of these problems especially with regard to concrete structures.

The problems can generally be subdivided into the following groups:

- physical representation
- mathematical formulation
- computer techniques

The first group includes questions of material properties and failure criteria as well as engineering judgement.

Besides the well-known difficulties a possible way will be shown to find a mathematical model for the physical problem. This alternative way is a statistical analogon (Monte Carlo Method). It is then tried to complete the lacking material properties and failure criteria using this statistical analogon.

Finally the problems occuring in computer techniques such as stability of the mathematical model etc. will be shown.

1. Einleitung

Mit der Vorgabe des Spannungs-Tensors $\mathcal{T}(P,t)$ (t = Zeit) in einem Punkt $P(x,y,z)$ im Gebiet $\mathcal{E}_i$ eines Körpers - der einer beliebigen Belastung unterworfen ist - ist der Spannungszustand eindeutig beschrieben. Ebenso beschreibt der Deformations-Tensor $\mathcal{D}(P,t)$ den Deformationszustand, wobei der Spannungs-Tensor mit dem Deformations-Tensor durch die effektive Spannungs-Dehnungs-Beziehung verbunden ist (z.B. das Hooke'sche Gesetz in der linearen Elastizitätstheorie).

Im folgenden sollen die Betrachtungen nur mit dem Spannungs-Tensor erfolgen.

Das Kriterium für den Eintritt einer Gefügetrennung in einem Gebiet $\mathcal{E}_i$ eines Körpers - der einer beliebigen Belastung unterworfen ist - wird durch eine geeignete Bruchtheorie bestimmt. Im räumlichen Fall kann die Grenzfläche der Bruchtheorie angenähert als eine Drehfläche aufgefasst werden. Siehe hierzu die Darstellung von Chwalla, Abb. 1.

2. Der Grenz- oder Bruchzustand

2.1 Brucharten

In morphologischer Hinsicht hat man drei Brucharten zu unterscheiden, und zwar:

Trennbrüche: Trennung des Gefüges und der Kristallite (oft verformungslos)

Gleitbrüche: gegenseitiges Abschieben der Teilchen

Mischbrüche: teils Gleiten, teils Trennen.

Allgemein lässt sich sagen, dass bei spröden Materialien die Trennbrüche überwiegen und man deshalb auch die grösste Zugspannung für die Gefügetrennung verantwortlich machte. (Gleichbedeutend ist es, wenn die grösste Dehnung benutzt wird.) Bei zähen Materialien wird die grösste Häufigkeit bei den Gleitbrüchen zu finden sein, was auf den Einfluss der grössten Schubspannung schliessen lässt.

Hiermit ist jedoch noch nichts über den herrschenden Spannungszustand ausgesagt.

Geht man vom Spannungszustand aus, so sind für den hydrostatischen Spannungszustand $\sigma_{Okt} = \sigma_0$; $\tau_{Oct} = 0$ Trenn- oder Sprödbrüche zu erwarten, auch dann, wenn es sich um zähes Material handelt. Für den Schubspannungszustand $\tau_{Oct} = \tau_0$; $\sigma_0 = 0$ ist allgemein mit Gleitbrüchen zu rechnen, auch dann, wenn sprödes Material vorliegt.

2.2 Wahrscheinlichkeiten für einen Bruchzustand

Mit dem Spannungszustand in einem Punkt $P(x,y,z)$ ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt einer bestimmten Art der Gefügetrennung gegeben (vorausgesetzt, man erreicht oder überschreitet die Grenzwerte (das Bruchkriterium) eines bestimmten Materials, z.B. nach Abb. 1).

Vorhanden ist im Punkt $P(x,y,z)$ der Spannungs-Tensor $\mathfrak{S}$, und damit sind die Hauptspannungen σ_k und die Hauptebenen n_k bekannt.

Die Trennung des Spannungs-Tensors in den Kugel-Tensor und den Diviator führt zu

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = p$$

$$\tau_o = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \qquad (2.1)$$

mit den Ebenen des Oktaeders $n = \frac{1}{\sqrt{3}}\{\pm 1; \pm 1; \pm 1\}$ im Koordinatensystem σ_{ij} $(j = 1 \ldots n)$.

In der linearen Elastizitätstheorie lässt sich jeder Spannungszustand im Spannungsellipsoid graphisch darstellen. Unter den gleichen Voraussetzungen stellt der abgespaltene Kugel-Tensor (wie der Name schon sagt) eine Kugel dar.

Die Trennung des Spannungs-Tensors $\mathfrak{S}$ in den Diviator $\mathfrak{S}'$ und den Kugel-Tensor $p\mathfrak{I}$ bedeutet graphisch ausgedrückt, dass vektoriell vom Polarstrahl $\mathfrak{S}(n) = \sigma(n)$ zur Oberfläche des Spannungsellipsoids der Kugelradius $R = \sigma_o$ abgezogen wird. Hierbei ist σ_o der mittlere Radius des Spannungsellipsoids. Das Resultat - der Diviator $\mathfrak{S}'$ - ist also ein Mass für die Differenz zwischen der Kugeloberfläche und der Oberfläche des Spannungsellipsoids, wobei die Oberflächen jeweils den geometrischen Ort aller Spannungspunkte darstellen.

Nun charakterisiert sicherlich die Krümmungsänderung des Spannungsellipsoids (auch der Abstand beider Oberflächen) das Mass der Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Gleitbruches, d.h. auch die Grösse des Diviators $\mathfrak{S}'$. Das Mass für den Eintritt eines Trennbruches wird offensichtlich durch den Kugel-Tensor charakterisiert.

Betrachtet man ferner die Oktaederschubspannung τ_o und Oktaedernormalspannung σ_o in der graphischen Darstellung des Spannungsellipsoids, so liegt der Spannungspunkt P offensichtlich auf einer Ellipse der Ebene σ_o, τ_o.

Graphische Darstellung (Abb. 2)

Stellt man im Koordinatensystem x, y zwei Kreise mit $R_1 > R_2$ dar und betrachtet R_1 als den grösseren und R_2 als den zweiten Halbmesser einer Ellipse, so erhält man mit einem Parameter α und der Gleichung der Ellipse in Normalform eine in die beiden Kreise einbeschriebene Kurve. Vertauscht man die beiden Halbmesser der Ellipse, so ergibt sich eine zweite Kurve, die ebenfalls zwischen den beiden Kreisen liegt.
Interpretiert man auf die x-Achse $\sigma_{Ou} - \sigma_o$ und auf die y-Achse $\tau_{Ou} - \tau_o$ so erhält man für einen gegebenen Spannungszustand (eingetragen mit σ_{Ou}, τ_{Ou}) einen Fluchtpunkt, der verbunden mit dem Ursprung des Koordinatensystems die Richtung für den Wahrscheinlichkeits-Vektor W angibt. Dieser Wahrscheinlichkeits-Vektor W schneidet die beiden Kreise R_1 und R_2 sowie beide Kurven τ_1 und τ_2 .

Bezieht man die Abstände der Schnittpunkte des W-Vektors auf die Radien R_1 und R_2 , so erhält man die Wahrscheinlichkeiten η_i $(i = 1 \ldots 3)$ für das Eintreten einer bestimmten Bruchart (Abb. 2).

Der Schnittpunkt beider Kurven liegt für $\alpha = 0$ unter $\varphi = \pi/4$. Das deutet darauf hin, dass unter $\varphi = \pi/4$ (also $\sigma_{Ou} = \tau_{Ou}$) für den Trenn- und Gleitbruch die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht, also ein Material beschrieben wird, das gleiche Empfindlichkeiten für den Trenn- und Gleitbruch besitzt.

In der Praxis haben wir spröde und zähe Materialien (Beton, Stahl), so dass sich für

- sprödes Materialverhalten der Schnittpunkt der beiden Kurven in Richtung $\varphi = \pi/2$ verschiebt und damit die Wahrscheinlichkeiten für einen Trennbruch vergrössert,

- zähes Materialverhalten der Schnittpunkt der beiden Kurven in Richtung $\varphi = 0$ verschiebt und damit die Wahrscheinlichkeiten für den Gleitbruch vergrössert.

Diese Verschiebung kann mit α beschrieben werden, indem die Gleichung der Ellipse mit einem Faktor oder einer Funktion $\alpha\ f(A, J')$ behaftet wird und damit die Wahrscheinlichkeit

$$\eta_i = f(A, J') \qquad (i = 1 \ldots 3) \tag{2.2}$$

eine Funktion des Spannungs-Tensors J' und der Materialeigenschaften A wird.

Normiert man $-1 \leq \alpha \leq 1$, so lässt sich schreiben:

für sprödes Materialverhalten $0 \leq \alpha_s \leq 1$

für zähes Materialverhalten $-1 \leq \alpha_s \leq 0$ (2.3)

Für $0 \leq \alpha_s \leq 1$ folgt für die Wahrscheinlichkeiten:

Trennbruchwahrscheinlichkeit η_1

$$\eta_1 = \eta_1 \cdot R_1 = \alpha_s R_1 - R_1 + (1-\alpha_s)\frac{1}{R_1}\sqrt{R_1^2 R_2^2 + (R_1^2 - R_2^2)(R_1 \cos\varphi)^2} \tag{2.4}$$

Gleitbruchwahrscheinlichkeit η_2

$$\eta_2 = \eta_2 \cdot R_2 = \alpha_s R_2 - R_2 + (1-\alpha_s)\frac{1}{R_1}\sqrt{R_1^2 R_2^2 + (R_1^2 - R_2^2)(R_1 \cos\varphi)^2 R_1^2} \tag{2.5}$$

Mischbruchwahrscheinlichkeit

$$\eta_3 = R_1 \cdot R_2 - \eta_1 \qquad \text{für } \eta_1 > \eta_2$$
$$\eta_3 = R_1 \cdot R_2 - \eta_2 \qquad \text{für } \eta_1 < \eta_2 \tag{2.6}$$

mit $\cos\varphi = \tau_{oct}/\sigma_{oct}$.

Normiert man die Wahrscheinlichkeiten, so erhält man:

Trennbruchwahrscheinlichkeit $\bar{\eta}_1$

$$\bar{\eta}_1 = \eta_1 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^{-1} \tag{2.7}$$

Gleitbruchwahrscheinlichkeit $\bar{\eta}_2$

$$\bar{\eta}_2 = \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^{-1}$$

Mischbruchwahrscheinlichkeit $\bar{\eta}_3$

$$\bar{\eta}_3 = \eta_3 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^{-1}$$

2.3 Bruchfläche im Punkt

Mit den Wahrscheinlichkeiten η_i $(i = 1 \ldots 3)$ wird die Bruchart festgelegt. Trifft die Wahrscheinlichkeitsbetrachtung für den Punkt $P(x,y,z)$ und in Abhängigkeit von σ_{oct}, τ_{oct} auf einen

- Trennbruch, so wird die algebraisch grösste Zugspannung für diesen Bruch verantwortlich gemacht. Aus dem Spannungsellipsoid erkennt man die Extremaleigenschaften der Hauptachsen, so dass σ_I als die grösste Hauptzugspannung den Bruch charakterisiert. Der Richtungsvektor $n_I = (\alpha_{Ix}, \alpha_{Iy}, \alpha_{Iz})$ drückt damit den Normalenvektor $n_1 = n_I$ für die Bruchfläche aus.

- Gleitbruch, so wird die algebraisch grösste Schubspannung für den Bruch verantwortlich gemacht. Die grösste wirksame Schubspannung $\max|\tau| = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$ mit $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ wirkt im Flächenelement dF und ist unter $\pi/4$ zu den Richtungsvektoren n_I und n_{III} geneigt. Dieser Sachverhalt ist in der Mohr'schen Darstellung mit den Euler-Koordinaten λ und φ deutlich erkennbar ($\lambda = 0$; $\varphi = \pi/4$). Der Normalvektor zu $\max \tau$ ist der Normalenvektor der Bruchfläche $n_{(\tau_{max})} = n_{III}$, also die Richtung der zugehörigen Normalspannung.

- Mischbruch, so sind die beiden Spannungen die grösste Zugspannung und die grösste Schubspannung am Bruch beteiligt. Der Normalenvektor n_N ist also zwischen den Vektoren n_I und n_{III} zu suchen und wird über den Abstand der Häufigkeitsverteilung zum Gleit- und Trennbruch festgelegt.

Anmerkung:
Bei dieser Festlegung wurde die Wirksamkeit der mittleren Hauptspannung vernachlässigt.

2.4 Bruchfläche im Gebiet ϵ_i

Bisher wurde die Bruchfläche im Punkt $P(x,y,z)$ mit ihren Normalvektoren bestimmt. Die Erweiterung auf das Gebiet ϵ_i soll über den Gradienten der für den Eintritt einer Gefügetrennung (Bruchfläche) massgebenden Spannung erfolgen. Die Richtung des Normalenvektors zur Bruchfläche wird sich an der Richtung orientieren, in die der extremale (kleinste bzw. grösste) Gradient wandert. Zu beachten ist, dass die Normalspannung senkrecht zur Ebene steht und die Schubspannung in der Ebene liegt.

Schreibt man für die massgebende Spannung allgemein die vektorielle Grösse $\vec{\sigma}$, die in jedem Raumpunkt M einen bestimmten Wert annimmt, so bedeutet dies die Vektorfunktion eines Punktes oder Vektorfeldes $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_{(M)}$.
Das Feld lässt sich durch die Vektorfunktion einer vektoriellen Veränderlichen u definieren.

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_{(u)} \tag{2.8}$$

Das Vektorfeld lässt sich durch drei skalare Felder $\sigma'_{(u)}$; $\sigma'_{(u)}$; $\sigma'_{(u)}$ mit den drei Vektoren e_1 ; e_2 ; e_3 definieren.

$$\vec{\sigma} = \sigma' e_1 + \sigma' e_2 + \sigma' e_3 \tag{2.9}$$

Werden für diese Vektoren die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen n_1 ; n_2 ; n_3 gewählt, so folgt in kartesischen Koordinaten ausgedrückt

$$\vec{\sigma} = \sigma_x(x,y,z) \cdot n_1 + \sigma_y(x,y,z) \cdot n_2 + \sigma_z(x,y,z) \cdot n_3 \tag{2.10}$$

Mit den drei skalaren Feldern lässt sich der Gradient bestimmen

$$grad = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \tag{2.11}$$

und die Richtungskurven für die extremalen Gradienten angeben (Abb.3,Fig2).

Rissausdehnung

Der Riss wird flächenhaft auftreten, wobei diese Fläche doppelt gekrümmt sein kann. Definiert man den Verlauf des Risses in Richtung der extremalen Gradienten der für den Bruch massgebenden Spannung und vergleicht die aufgewendete Arbeit mit der für einen Bruch erforderlichen Arbeit, so ergibt sich ein Mass für die räumliche Ausdehnung des Risses.
Es erscheint sinnvoll, das Arbeitsintegral nicht über die gesamte Rissfläche zu erstrecken, sondern es auf eine Einheitsfläche zu beziehen.
Die Begründung kann darin gesehen werden, dass sich der Spannungszustand unter einer Belastung erst einstellen muss, und somit der Bereich von $0 \leq \sigma \leq \sigma_{max}$ durchlaufen wird, wobei $\sigma_{grenz} < \sigma_{max}$ ist (σ= Spannungs-Tensor).

Das Integral über die Arbeit und der Vergleich der Arbeiten

$$A_{grenz}(x,y,z) - A_{tatsächl.}(x,y,z) < 0 \tag{2.12}$$

läuft dann auf den Vergleich der Spannungen hinaus.

$$\sigma_{grenz}(x,y,z) - \sigma_{tatsächl.}(x,y,z) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\sigma \tag{2.13}$$

Mit $\Delta\sigma$ ist dann die räumliche Ausdehnung des flächenhaften Risses vorerst begrenzt. Im allgemeinen ist diese Begrenzung gleich der des Gebietes G.

2.5 Konvergenzbetrachtung

Die entstandenen Risse im Gebiet G verändern das Tragverhalten und beeinflussen den Spannungs-Tensor σ. Die Kontinuitätsbedingungen werden aufgehoben und es sind zusätzliche Randbedingungen zu formulieren. Die Umgebung des Gebietes G wird ebenfalls durch die Risse beeinflusst und der Spannungs-Tensor σ wird zusätzlich eine Funktion der Risse R im Gebiet G.

$$\sigma(P(x,y,z),t) \rightarrow \sigma(P(x,y,z),t,R) \tag{2.14}$$

Es erscheint sinnvoll, die Abhängigkeit des Spannungs-Tensors σ vom Riss R schrittweise (iterativ) zu ermitteln, wobei für jeden Berechnungsschritt bei Berücksichtigung der vorhandenen Risse die Kontinuitätsbedingungen gelöst, neue Randbedingungen formuliert und die Spannungsumlagerungen berechnet werden, und zwar für dieselbe äussere Belastung.

Die Konvergenz wird erreicht, wenn ein Ruhezustand eintritt, also der Riss endgültig stehen bleibt.

3. Anwendung auf die Methode der Finiten Elemente

3.1 Die Methode der Finiten Elemente soll als bekannt vorausgesetzt werden. Alle Betrachtungen werden auf Betonkonstruktionen bezogen, im spez. auf Spannbeton-Reaktordruckgefässe.

3.2 Bruchzustand im Gebiet $\mathcal{E}_i$

Der Spannungszustand im Punkt $P_{(x,y,z)} = P_{i,j,k}$ (z.B. im Schwerpunkt) in einem Element E_i ist mit dem Spannungs-Tensor $\mathcal{S}$ gegeben. Der Vergleich mit dem Bruchkriterium (z.B. nach Abb. 1) gibt an, dass eine Gefügetrennung eintritt.

Nach 2.2 und 2.3 wird die Art der Gefügetrennung im Punkt $P_{i,j,k}$ festgelegt und die Einheitsbruchfläche im Raum orientiert (durch den Normalenvektor).

Zur Gradientenbildung wird von dem Element E_j im Gebiet $\mathcal{E}_i$ ausgegangen, das die grösste Spannung besitzt, die zum Bruch geführt hat.

Der Gradient lässt sich näherungsweise über die benachbarten Spannungspunkte (die durch ihre Koordinaten festgelegt sind) bestimmen. Diese benachbarten Spannungspunkte können die Schwerpunkte der benachbarten Elemente, aber auch Zwischenpunkte sein (Abb. 3, Fig. 1).

3.21 Rissausbreitung für einen Trennbruch

Die Ausrichtung und Ausbreitung des Risses im Gebiet $\mathcal{E}_i$ soll im folgenden für einen Trennbruch beschrieben werden.

Der Einheitsvektor n_I der grössten Hauptzugspannung σ_I (die für den Bruch verantwortlich gemacht wird) ist auch der Einheits-Normalenvektor auf die Einheits-Bruchfläche ΔF im Punkt $P_{i,j,k}$ des Gebietes $\mathcal{E}_i$.
Über den Einheitsvektor n_I wird festgelegt, zwischen welchen - durch die benachbarten Spannungspunkte festgelegten - Ebenen durch den Punkt $P_{i,j,k}$ die Bruchfläche liegt. Durch Interpolation erhält man die Richtungen der kleinsten Gradienten sowie die Punkte P_n (im Abstand $\bar{r}$ von $P_{i,j,k}$) mit den Koordinaten x, y, z und die jeweils zugehörige grösste Hauptzugspannung $\sigma_{I(n)}$ mit dem Einheitsvektor $n_{I(n)}$ (Abb. 3, Fig. 3).

Die Bruchfläche ist in den Punkten P_n wieder durch den Einheitsvektor festgelegt und wird im allgemeinen Fall eine doppelt gekrümmte Fläche sein. Die Bruchfläche ist also punktweise festgelegt (Abb. 4, Fig. 3).

Gleichzeitig vergleicht man gemäss 2.4 die Spannungen, um den Stillstand des Risses zu erfassen. Diese Rissausdehnungsberechnung wird solange fortgesetzt, bis der Spannungsvergleich gerade unter Null sinkt, also

$$\sigma_{vorh}(P_n) - \sigma_{grenz}(P_n) < 0 \qquad (3.1)$$

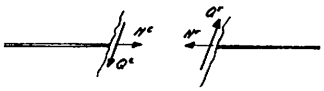
wird.

Für jeden benachbarten Spannungspunkt und für die interpolierten Punkte P_n wird mit dem vorhandenen Spannungs-Tensor σ gem. 2.2 die Bruchwahrscheinlichkeit geprüft.

Wird nun eine andere Bruchart massgebend, so erfolgt - über einen Übergangsbereich - der Übergang von der einen Bruchart zur anderen.

3.22 Kontinuitätsbedingungen, Randbedingungen

Nachdem die Rissfläche punktweise festgelegt ist, wird geprüft, welche Fesseln durchtrennt worden sind. Die Fesseln stellen die Koppelungen zwischen den Knotenpunkten der Elemente dar. Mit der Durchtrennung solcher Fesseln werden die Kontinuitätsbedingungen aufgehoben. An diesen Schnittstellen müssen nun zusätzliche Randbedingungen formuliert werden, und zwar



$$N^c = N^r = N \text{ für } N = \text{Druckkraft}$$
$$N^c = N^r = 0 \text{ für } N = \text{Zugkraft} \qquad (3.2)$$
$$Q^c = Q^r = \mu_0 N$$

wobei μ_0 der Reibungsbeiwert ist und je nach der Bruchart verschieden sein kann.

Alle Knotenpunkte sind mit ihren Koordinaten x, y, z bekannt, ebenso die Bruchfläche punktweise (mit den Koordinaten für P_n). Damit lassen sich alle Fesseln, die durchtrennt wurden, bestimmen.

Das Lösen der Kontinuitätsbedingungen und die Formulierung der Randbedingungen geschieht an den Knotenpunkten der Elemente. Hierdurch werden zusätzliche Freiheitsgrade erforderlich. Zur Bestimmung bieten sich grundsätzlich folgende Wege an:

- Alle Freiheitsgrade werden sofort vorgegeben. Hierdurch wird das Problem im räumlichen Fall 8-mal grösser.

- Die erforderlichen Freiheitsgrade werden freigegeben, wenn es erforderlich wird. Hierdurch wird das Problem zwischen 1- bis 8-mal grösser, wobei bei flächenhaften Rissen oft nur eine Problemvergrösserung von 1- bis 4-mal zu erwarten ist.

- Die erforderlichen Freiheitsgrade werden indirekt im Bedarfsfall gegeben, jedoch mit Einschränkungen durch die Formulierung an einem Knoten. Das Problem wird nicht grösser.

Die Wahl zwischen diesen drei Möglichkeiten ist abhängig vom Kompromiss zwischen Genauigkeit und Computerkosten.

3.23 Risshäufigkeit

Die Risshäufigkeit soll statistisch bestimmt werden. Das Ereignis, welches eintritt, wird mit Hilfe von Zufallszahlen (random numbers) festgelegt. Die Zufallszahlen p sind normiert ($0 \leq p \leq 1$).

Rissfolge

Die Rissfolge wird für den Abstand ℓ definiert, wobei ℓ eine Funktion vom Bewehrungsgehalt je Volumeneinheit r_e, dem Durchmesser d_e der Bewehrungseisen und der Oberflächenbeschaffenheit μ_e ist.

Nimmt man die charakteristischen Grössen r_e, die Haftfähigkeit μ_e und die Materialeigenschaften des Betons B, so folgt

$$\ell = f(r_e, \mu_e, B) \tag{3.3}$$

Die Normierung von ℓ kann z.B. für ein bestimmtes r_e, wie in Abb. 4, Fig. 1,2 dargestellt, vorgenommen werden.

Die Zufallszahl legt den Abstand ℓ_i vom vorhergehenden Riss fest, also für den 2. Riss ist ℓ_i gleich dem Betrag des Vektors $\vec{v}$ mit dem Ursprung im Punkt $P_{i,j,k}$.

Dieser Vektor $\vec{v}$ wird wiederum für den Fall des Trennbruches in Richtung $\vec{\sigma}_I(m_I)$ orientiert sein und sich mit fortschreitender Rechnung an die Kurve als Tangente anschmiegen, die durch $(m_{\sigma_I})\ \vec{\sigma}_I$ beschrieben wird. Die flächenhafte Ausbreitung des ersten, statistisch festgelegten Risses orientiert sich am zuletzt berechneten Riss (hier der erste Riss), in dem der Abstand ℓ für jeden Punkt des vorher erfassten Risses bestimmt wird.

Diese Rechnung wird so lange fortgesetzt, bis die Grenzen des Gebietes G_i erreicht werden, wobei ein möglicher Wechsel zu einer anderen Bruchart geprüft wird. Für den Grenzfall $\ell \to \infty$ (ℓ sehr gross) entsteht im Gebiet G_i nur ein Riss. Die Lösung der Kontinuitätsbedingungen und die Formulierung der Randbedingungen erfolgt wie unter Punkt 3.22.

Mit Rücksicht auf die Computerkosten kann die statistische Erfassung der Rissfolge nur in einem Durchgang bestimmt werden. Die Erfassung über eine Häufigkeitsverteilung wird jedoch sinnvoller sein, wobei ein Mittelwert oder auch ein Extremwert angestrebt werden kann.

3.24 Gefügeverband und zusätzliche Risse

Die Häufigkeit der Risse nach 3.23, der Spannungszustand und der Bewehrungsgrad sind ein Mass für die vagabundierenden Risse, die im Gebiet G_i eintreten können und beliebig im Raum orientiert sein werden.
Die Wahrscheinlichkeiten p_{ni} $(i = 1 \ldots n)$ bestimmen dann den Gefügeverband im Gebiet G_i.

3.25 Festkörper-Verschiebungen

Für die Spannglieder und Bewehrungseisen ist es von Bedeutung, dass der geometrische Abstand (Hebelarm) und seine mögliche Veränderung im Riss- und Bruchzustand erfasst wird.
Die Wahrscheinlichkeiten p_{ni} $(i = 1 \ldots n)$ bestimmen die geometrischen Veränderungen, die hier als Festkörper-Verschiebungen bezeichnet werden sollen.

3.26 Spannglieder, Bewehrungseisen

Das Lösen der Kontinuitätsbedingungen (gem. 3.22) bezog sich auf die Steifigkeitsanteile des Betons. Erhalten bleiben die Kontinuitätsbedingungen, d.h. die Steifigkeitsanteile der Spannglieder und der Bewehrungseisen. Für diese Kontinuitätsbedingungen gilt dann das entsprechende 1-dim. Bruchkriterium.

Spannbeton-Reaktordruckgefässe

Bei Spannbeton-Reaktordruckgefässen ist zusätzlich der Liner und die evtl. vorhandenen Durchbrüche mit ihren flächenhaften Stahlauskleidungen (Rohre) zu erfassen. Für die Kontinuitätsbedingungen gilt das oben Gesagte; das Bruchkriterium ist hier 2-dim.

3.3 Spannungsumlagerungen

Nachdem der Risszustand in allen Gebieten G_i $(i=1...n)$ bestimmt worden ist, die Kontinuitätsbedingungen gelöst und die Randbedingungen formuliert wurden, wird für denselben Belastungszustand das Gleichungssystem neu gelöst. Damit erhält man den Spannungs-Tensor γ unter Berücksichtigung des Riss- bzw. Bruchzustandes in den Gebieten G_i $(i=1...n)$.

3.4 Der zweite Iterationsschritt

Zunächst wird wiederum das Gebiet $\bar{G}_i$ festgelegt, in dem der Spannungs-Tensor γ das Bruchkriterium überschreitet. Das Gebiet $\bar{G}_i$ bedeutet allg. die Erweiterung des Gebietes G_i, wobei schon jetzt mehrere Gebiete G_{i+k} zu einem grösseren zusammenlaufen können. Die vorhandenen Risse aus dem vorherigen Iterationsschritt (aus dem Gebiet G_i) bringen zusätzlich die Wahrscheinlichkeit η_i für den Fortgang im Gebiet $\bar{G}_i$ mit. $\eta_i = 1$ kann als allg. Fall angesehen werden. Der Berechnungsgang wird nun wie unter 3.2 fortgesetzt.

3.5 Konvergenzbetrachtung

Dieser zuvor geschilderte Ablauf wird so lange fortgesetzt, bis sich keine Änderung im Spannungszustand mehr einstellt.

Dies kann bedeuten:

a) Das Tragwerk ist im Ruhezustand, wobei ein Restquerschnitt verbleibt und das Gleichgewicht der inneren und äusseren Kräfte mit den Stahlanteilen gewährleistet wird.
Diese Berechnung kann dann mit erhöhter Belastung bis zum vollständigen Bruch fortgeführt werden.

b) Das Tragwerk erreicht den vollständigen Bruchzustand; das bedeutet, das System hat sich in den Dämpfungsgliedern aufgehängt. Diese Dämpfungsglieder werden benötigt, um das math.-physikalische System zu stabilisieren.

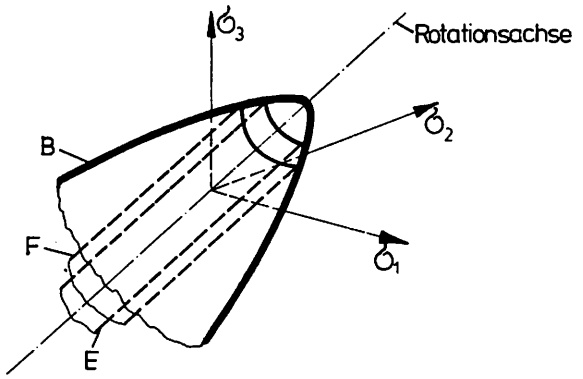
4. Programmsystem VERRIS

VERRIS beschreibt das Tragverhalten von Konstruktionselementen und Bauteilen vom Entstehen von Rissen bis zum Bruchversagen. In Abb. 5 ist der Aufbau des Programmsystems VERRIS schematisch dargestellt.

Der Input kann mit folgenden Variationen erfolgen:

a) elastisches Materialverhalten mit VERSAL (Pr.-Nr. 11-5)
b) elastisch-plastisches Materialverhalten mit VERPLA (Pr.-Nr. 12-3)
c) zeitabhängiges Materialverhalten mit VERTIM (Pr.-Nr. 13-2)

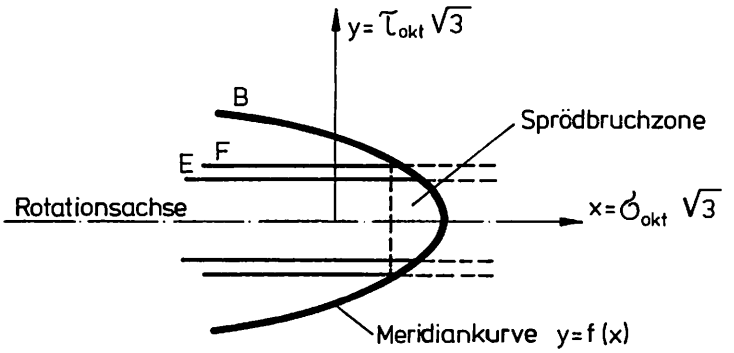
Unabhängig von der Programmwahl für den Input kann VERRIS elastisches, elastisch-plastisches und zeitabhängiges Materialverhalten im Riss- bzw. Bruchzustand berücksichtigen. Die entsprechenden Kriterien, insbesondere die der Zeitstandfestigkeit, müssen als Input vorgegeben werden.



B = Bruch - Grenzfläche

F = Fliess - Grenzfläche

E = Elastische Grenzfläche



Darstellung der Grenzflächen
der Bruchtheorie

Abb.1

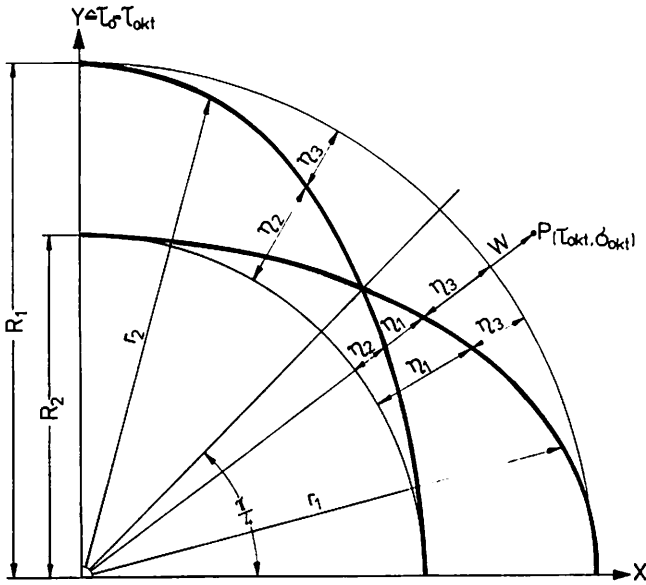


Fig.1
(für ϰ=0)

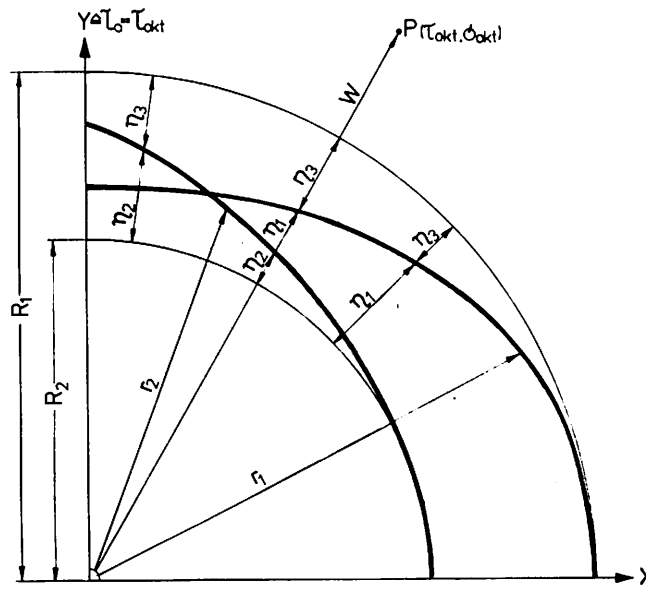
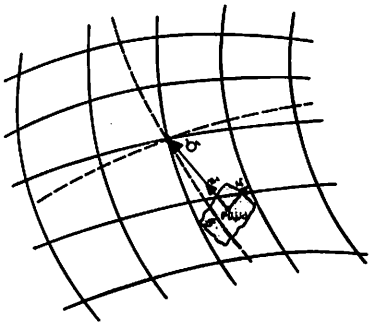


Fig.2
(für ϰ=0,3)

Bruch-Wahrscheinlichkeiten
Abb.2

Fig.2 Spannungsfläche der maßgebenden Bruchspannung über der Bruchfläche



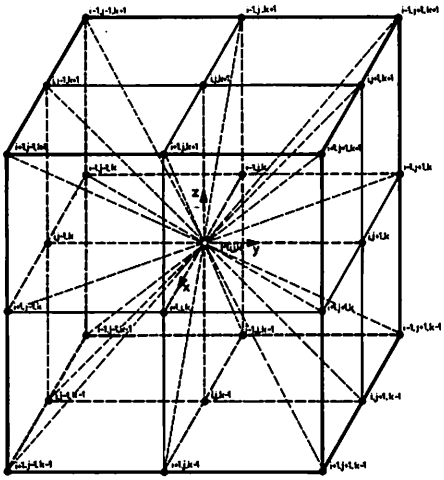


Fig.1 Zu P(i,j,k) benachbarte Spannungspunkte

Fig.3 Interpolation für den Verlauf der Bruchfläche

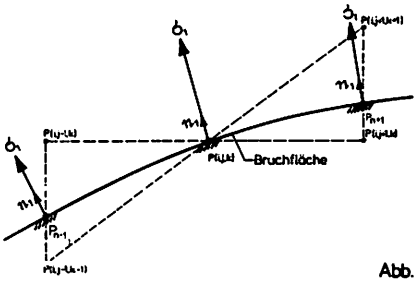


Abb. 3

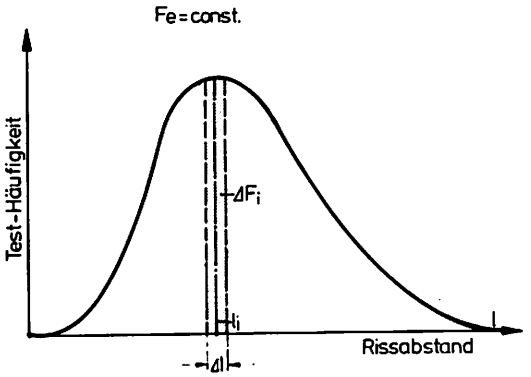


Fig.1 Risshäufigkeits-Verteilung

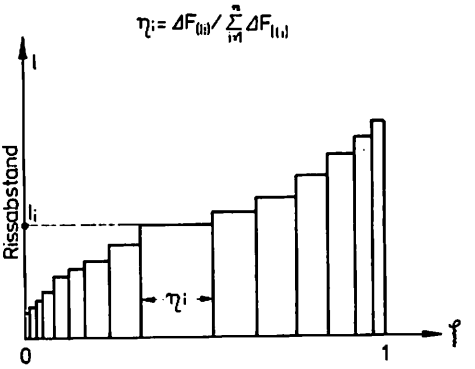


Fig.2 Wahrscheinlichkeits-Verteilung

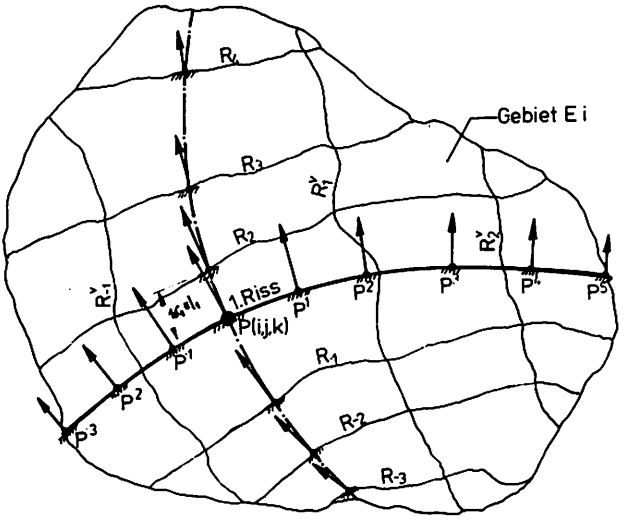
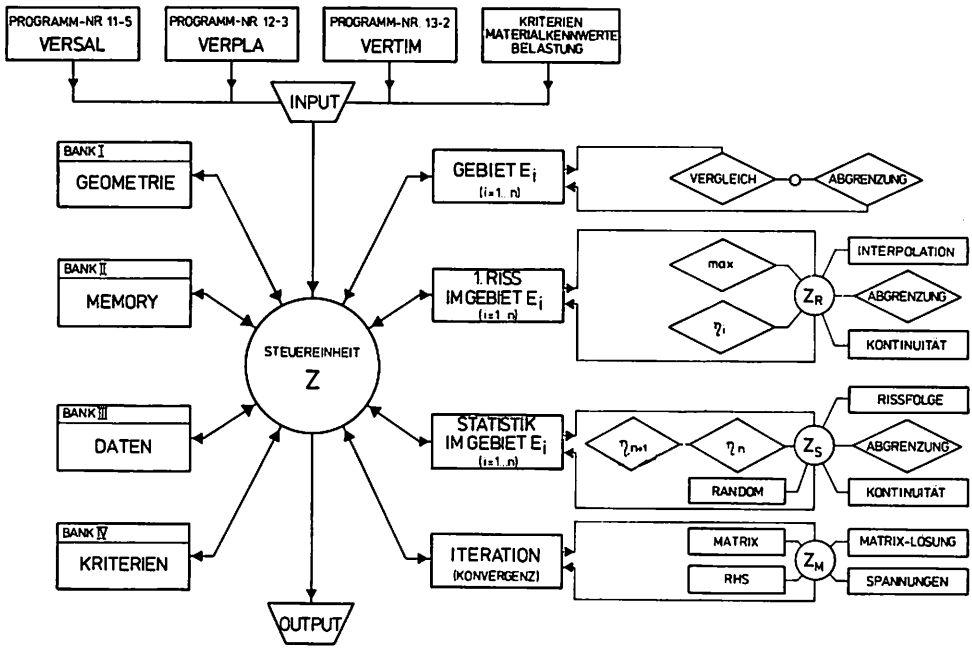


Fig.3 Rissverteilung im Gebiet E i

Abb.4



AUFBAU DES PROGRAMMSYSTEMS VERRIS
PROGRAMM-NR. 14-2

Abb.5

DISCUSSION

Q K. DRITTLER, Germany

Nach Aufstellung des ersten Risses erzeugt das Programmstatistisch weitere Risse. Lassen Sie das Programm nur einmal oder mehrmals "durchlaufen". Falls Sie es mehrfach rechnen lassen, möchte ich fragen, ob Sie dann den Mittelwert aller "Läufe" nehmen, oder nur den ungünstigsten ? Nehmen Sie den ungünstigsten, wie sichern Sie dann, dass es tatsächlich der ungünstigste ist ? Das letztere ist u. a. für Sicherheitsbetrachtungen von belang.

A H. H. HOFMANN, Germany

Vorgesehen ist z. Zt. nach Erfassung des ersten Risses die Programmstatistik für weitere Risse zunächst nur einmal durchlaufen zu lassen. Dies geschieht allein mit Rücksicht auf die Rechenkosten.
Zeigt es sich, dass ein mehrfacher Durchlauf (also der Weg über die Häufigkeitsverteilung) erforderlich bzw. notwending wird, so ist dies jederzeit möglich. Die Frage, ob man dann den Mittelwert aller "Läufe" oder den ungünstigsten für den Risszustand auswählt, wird man dann gemeinsam mit der Festsetzung der Ereignis-Wahrscheinlichkeiten betrachten müssen.

Q W. I. OBERNDORFER, Austria

Wurde der Effekt der "Hysteresis-Schleife" bei der Entlastung von Stahleinlagen in der Rissumgebung berücksichtigt ?

A H. H. HOFMANN, Germany

Der Effekt der "Hysteresis-Schleife" bei der Entlastung von Stahleinlagen in der Rissumgebung ist zur Zeit nicht berücksichtigt.

Q K. BRANDES, Germany

Die Überlagerung der deterministischer Berechnung durch eine probalistische, um das nicht streng deterministische Verhalten der Werkstoffe zu berücksichtigen, ist verschiedentlich vorgeschlagen worden. Die Finite-Element-Methode bietet sich geradezu dazu an, solche Methoden bereits bei elastischen (nicht unbedingt linearen) Problemen anzuwenden. Haben Sie nur für den Bruchbereich diese Monte-Carlo-Methode verwendet oder bereits bei der elastischen (eventuell schrittweisen) Berechnung ?

A H. H. HOFMANN, Germany

Die statistischen Betrachtungen haben wir zunächst nur für die Bruchberechnung verwendet. Die Erfahrungen, die wir hier sammeln werden (sowohl bei der mathematischen

Behandlung, wie auch bei der Beschreibung physikalischer Vorgänge) werden wir sicher zu übertragen versuchen.

Q G. IVANYI, Germany

1. Ist eine Berechnung auf der Grundlage der von Ihnen präsentierten statistischen Gesetzmässigkeiten für die Abstände und Länge der Risse durchgeführt worden ?
2. Wenn ja, nach welchen Versuchen oder sonstigen Überlegungen wurden diese Gesetze für das Programm festgelegt und beziehen sie sich auf einen bewehrten oder unbewehrten Beton ?

A H. H. HOFMANN, Germany

1. Die einzelnen Routinen sind getestet. Für einen gesamten Programmdurchlauf, also die Berechnung eines Beispieles, fehlten uns bis heute die finanziellen Voraussetzungen.
2. Für das Testen der Routinen des Programmsystems wurden die Ereignis-Wahrscheinlichkeiten zunächst frei definiert (d. h. ohne Festlegung an bestimmte Versuchsergebnisse). Dies geschah auf Grund der Überlegung, dass für ein spezielles Problem der Auftraggeber seine Versuchsergebnisse mitliefert, bzw. dass die Ereignis-Wahrscheinlichkeiten in gemeinsamen Gespräch festgelegt werden.