ORDER, HEAT, INTRINSIC DISSIPATION AND INELASTIC ANALYSIS

(Ordre, chaleur, dissipation intrinsèque et analyse du comportement anélastique)

J. M. BOISSERIE

Electricité de France, Service Informatique et Mathématiques Appliquées, Direction des Etudes et Recherches, F-78400 Chatou, France

P. GUELIN

Université de Grenoble, Institut de Mécanique de Grenoble, B.P. No. 53, Centre de Tri, F-38041 Grenoble Cedex, France

This paper is devoted to the analysis of the physical back-ground of a discrete memory definition, previously used in a tensorial formulation of constitutive laws describing hysteresis and hardening (Boisserie and Guélin, SMIRT 4, L 1/9, 1977).

a) The effective stress σ is expressed as the sum of two hereditary contributions σ_a and σ_h of discrete and continuous memory types respectively. Using as an heuristic tool the well-known models with springs and friction-slider elements a tensorial formulation of σ_a is then obtained easily. However the discrete memory definition is proceeded introducing a scalar auxiliary function W ("help function"), the physical meaning of which is not given. The σ_a contribution plays an important part in the whole theory : the use of W and others points of the theory has to be justified.

b) The approach is based on a detailed thermomechanical study of the springs and friction-slider elements models. The results are obtained for any cyclic evolution (performed at a fixed isothermal temperature T_0). The analysis can be immediately extended to the tensorial definition of pure hysteresis contribution .

c) Mains results can be presented as follows : 1) the thermodynamic description of pure hysteresis can be done by the means of two, and only two, state variable rates : strain rate $\mathcal{D}$ and "entropic" rate $T_0 \dot{S}$ (say $\dot{I}$). 2) The Gibbs equation is of discrete memory form. 3) The received reversible power π is : $\sigma_{aR}\mathcal{D}$ if σ_{aR} is the actual reference stress tensor, chosen by "help function algorithm" in the actual discrete set of memorized stress σ_{aI} (associated to the inversion points of the cyclic evolution). 4) The thermodynamic description is based on the discrete memory Gibbs equation : $\dot{E} = \dot{I} + \sigma_{aR}\mathcal{D}$. 5) The help function rate $\dot{W}$ is equal to the intrinsic dissipation ϕ (equal to $\sigma_a\mathcal{D} - \pi$). 6) The loading-unloading criterion expresses the non-decreasing variation of ϕ. 7) The previously defined "hardening progress" parameter is a cumulated intrinsic dissipation. 8) If the monotonous first loading curve $\sigma_a(\varepsilon)$ is given, all properties are determined including the Taylor-Quinney "effect" which is then reduced to the energy balance : however, for an alternative procedure, two fondamental curves, heat rate $\dot{Q}$ and $\dot{I}(\varepsilon)$ are necessary to define all the properties (generalization of De Carbon analysis). 9) For any evolution along a given fixed cycle the thermodynamical rates are periodically restored (Bridgman analysis) : the σ_a contribution of the constitutive law expresses the "stationnary properties" previously introduced, and pure hysteresis implies no hardening. 10) In the real case 1, 2, 3 or 4 of the four parts of σ_h can be different from zero : so 15 hardening types can be considered and the monotonous first loading curve is not able to give all the properties. 11) A new thermoplasticity theory is introduced.

1. Introduction

1.1. Rappel du formalisme de la loi constitutive tensorielle

Dans la référence [1] on a proposé une formulation tensorielle de loi constitutive décrivant l'hystérésis mécanique et l'écrouissage de continus simples, isotropes sans endommagement. Un bref rappel rend cette note autonome. On désigne par D_J et $\bullet$ respectivement le taux de Jaumann (en rotation propre) et la dérivée particulaire (en suivant le mouvement).

Hypothèse 1 ; le taux du tenseur contrainte de Cauchy est la somme :

$$D_J\sigma = D_J\sigma_a + D_J\sigma_v + D_J\sigma_g \tag{1}$$

de 3 contributions, $D_J\sigma_a$ à mémoire discrète, $D_J\sigma_v$ et $D_J\sigma_g$ à mémoire continue. Seul $D_J\sigma_v$ dépend de la loi de temps de la suite des états traversés.

Hypothèse 2 ; Si $\mathcal{D}$ note le tenseur vitesse de déformation, le corps est au repos ($\mathcal{D} = 0$) depuis un laps de temps au moins égal à un temps caractéristique t_c antérieurement à l'instant initial de l'évolution. Soit H la fonction Heaviside, χ une fonction de relaxation à support borné par t_c, $f_v(\mathcal{D})$ une Fonction Tensorielle Isotrope (FTI) et $A_v(\eta)$ une fonction scalaire du paramètre d'avancement de l'écrouissage η, scalaire positif non décroissant défini ci-dessous par (11). Alors :

Hypothèse 3 : σ_v est la somme de deux produits de convolution $f_v * \chi_{(t)}$ et $[A_v f_v] * H_{(t)}$; Compte tenu de l'hypothèse 2 :

$$D_J\sigma_v(t) = D_J\sigma_{vm} + D_J\sigma_{vH} = \left[\chi(0) f_v(\mathcal{D}(t)) + \int_{t_1}^{t} \chi'(t-\tau) f_v(\tau)\, d\tau\right] + \left[A_v(\eta(t)) f_v(t)\right] \tag{2}$$

avec : $t_1 = 0 \quad \forall\, t \leq t_c$ et : $t_1 = t - t_c \quad \forall\, t > t_c$ (par exemple)

Pour définir $D_J\sigma_a$ on a introduit en [1] une hypoélasticité à mémoire discrète :

$$D_J\sigma_a = h(\sigma_a - \sigma_{aR}, \mathcal{D}, \omega) \tag{3}$$

où w = 1 ou 2 est le paramètre de Masing, σ_{aR} une contrainte, dite de référence, constante par morceaux -de même que ω- et h une FTI particulière s'annulant avec $\mathcal{D}$:

$$h = a_0 1 + a_1 \mathcal{D} + a_2(\sigma_a - \sigma_{aR}) \tag{4}$$

homogène de degré - 1 par rapport à t grâce à :

$$a_0 = \alpha_0 E_1 + \alpha_3 \overline{\Delta M} + \alpha_5 \overline{\Delta N} \quad ; \quad a_1 = \alpha_1 \quad ; \quad a_2 = \alpha_2 E_1 + \alpha_4 \overline{\Delta M} + \alpha_6 \overline{\Delta N} \tag{5}$$

Dans (5) les α sont des fonctions de ω et des invariants ΔS_i (i = 1, 2, 3) de : $\sigma_a - \sigma_{aR}$. D'autre part E_1 note la trace de $\mathcal{D}$ et :

$$\overline{\Delta M} = tr(\sigma_a - \sigma_{aR})\mathcal{D} \quad ; \quad \overline{\Delta N} = tr(\sigma_a - \sigma_{aR})^2 \mathcal{D} \tag{6}$$

Pour définir ω et σ_{aR} il faut définir un critère de charge-décharge.

Hypothèse 4 : L'instant t est instant d'inversion t_I si entre t et $t + dt$

$$\delta W_L < 0 \tag{7}$$

où W_L est une fonction d'aide définie continue non décroissante par morceaux, de différentielle :

$$dW_L = tr(\sigma_a - \sigma_{aR})\mathcal{D}\, dt \tag{8}$$

Si (7) est vérifié (3) doit être mis en oeuvre avec de nouvelles valeurs de σ_{aR} et ω (Fig. 1 et 2). Un usage commode de W_L s'obtient en posant (cf. [1]) :

$$W_L(t_{I+}) = 0 \quad ; \quad W = c\, W_L \quad ; \quad c = 2/\omega^2 \tag{9}$$

On sait qu'il est alors possible de construire un algorithme :

$$\mathcal{A}(w\,;\,dW_L) \Rightarrow [\,\omega,\ \sigma_{aM}^{K,\alpha},\ \sigma_{aR}^{K,\alpha}] \tag{10}$$

déterminant, par arc α de branche K, le scalaire w, la suite des états mémorisés σ_{aM} et l'élément de cette suite σ_{aR} (Fig. 1 et 2).

Hypothèse 5 : On pose :

$$\eta = \frac{1}{\eta_0}\int_0^t tr\left(\sigma_a - \sigma_{aR}^{K,\alpha}\right)\mathcal{D}(\tau)\,d\tau \tag{11}$$

Hypothèse 6 : La définition de $D_J\sigma_g$ est analogue à celle de $D_J\sigma_v$. Le rôle de f_v est joué par une F T I :

$$f_g = D_J\sigma_g - g_0\,1 - g_2(\sigma_g - \sigma_{gR}) \tag{12}$$

dont la définition est liée à (4) et (5) selon :

$$\begin{aligned} &g_0 = \gamma_0 E_1 + \gamma_3\,\Delta\bar{M} + \gamma_5\,\Delta\bar{N} \quad ; \quad g_2 = \gamma_2 E_1 + \gamma_4\,\Delta\bar{M} + \gamma_6\,\Delta\bar{N} \\ &\gamma_j = \alpha_j\,\overset{\infty}{\gamma}_j\,\bar{\gamma}_j(\eta) \quad ; \quad 0 \leq \bar{\gamma}_j \leq 1 \quad ; \quad j = 0,\dots,6 \quad ; \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \tag{13}$$

Les rôles de χ et t sont joués par φ et X tel que :

$$dX = d\eta \tag{14}$$

par exemple. La somme des deux convolutions est alors :

$$D_J\sigma_g = D_J\sigma_{gm} + D_J\sigma_{gH} = \left[\varphi(0)f_g + \frac{dX}{dt}\int_{X_1}^{X}\varphi'(X-x)\,f_g(x)\,\frac{dt}{dx}(x)\,dx\right] + \left[A_g(\eta(X))\,f_g(X)\right] \tag{15}$$

où : $X_1 = X_0 \quad \forall\ X - X_0 \leq X_c$ et : $X_1 = X - X_c \quad \forall\ X - X_0 > X_c$ par exemple.

Hypothèse 7 : Pour l'évolution réelle on remplace σ_a et σ_g par σ dans (3) et (15).

Hypothèse 8 : Les t_I de l'évolution réelle et de l'évolution fictive associée définie par σ_a seul -évolution squelette- sont les mêmes. Avec (2) et (15), (1) est une somme de 5 termes :

$$D_J\sigma = D_J\sigma_a + (D_J\sigma_{vm} + D_J\sigma_{vH}) + (D_J\sigma_{gm} + D_J\sigma_{gH})$$

et la loi constitutive est intégrodifférentielle :

$$\begin{aligned} D_J\sigma = {} & h(\sigma - \sigma_R, \mathcal{D}, \omega) + \left[\chi(0)f_v + \int\chi'(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\right] + \left[A_v\,f_v\right] + \\ & \left[\varphi(0)f_g(D_J\sigma, \sigma - \sigma_R) + \frac{dX}{dt}\int\varphi'(X-x)\,f_g\,\frac{dt}{dx}\,dx\right] + \left[A_g\,f_g(D_J\sigma, \sigma - \sigma_R)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

Avec (11) elle s'explicite par (3) à (6) munis de (7) à (10), par (2) et par (12) à (15).

1.2. La conception physique sous-jacente

Avec (1) on suppose que les propriétés du continu peuvent être décrites par la mise en jeu et l'interaction de 3 contributions dissipatives relevant de descriptions héréditaires et correspondant à trois classes de processus microstructuraux dissipatifs.

1.3. La question envisagée ici

La contribution σ_a joue un rôle important. (hypothèse 8, définition (11) de η, définition (14) de X).

Or la définition de σ_a est à mémoire discrète définie par (7) à (10).

Il s'agit ici d'examiner le sens physique du critère (7) de la fonction d'aide (8) et du paramètre d'écrouissage (11). Dans ce but il faut procéder à une analyse thermody-

namique. Comme en [1] , le modèle parallèle (à couples ressorts-patins en série) est un outil heuristique bien adapté.

2. Thermomécanique d'un modèle à ressorts et patins

2.1. Le modèle parallèle de couples ressorts patins montés en série

Comme en [1] on note $g''(e)$ la fonction de répartition des modules de rigidité des couples de seuil de déformation compris entre e et e + de (g(0) = g'(o) = 0). Le modèle est complètement défini par g et un ressort célibataire éventuel G_∞ , sans contrainte résiduelle dès que s'annule la force appliquée. Si G_o note la rigidité totale : $G_\infty + g'(\infty)$ on a (première charge) :

$$\sigma_a = \sigma_{a1} + \sigma_{a2} = \left[G_\infty \varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \varepsilon\, g''(e)\,de\right] + \left[\int_0^\varepsilon e\, g''(e)\,de\right] = G_o\,\varepsilon - \int_0^\varepsilon (\varepsilon - e)\, g''(e)\,de \qquad (17)$$

et en intégrant la dernière expression :

$$\sigma_a(\varepsilon) = G_o\,\varepsilon - g(\varepsilon) \qquad (18)$$

2.2. L'équation de Gibbs du modèle

Soit T_o la température constante du modèle. L'équation de Gibbs défini une fonction de "désordre de structure" I (ou S, si I note $T_o S$). Soit $\mathcal{P}_e$ et $\mathcal{P}_i$ les puissances des efforts extérieurs et intérieurs, directement opposées en évolution quasi-statique. Soit E , ϕ , Π et $\dot{Q}$ l'énergie interne, la dissipation intrinsèque, la puissance reversible reçue et le taux de chaleur reçue ASSOCIEE AUX IRREVERSIBILITES INTERNES INTRINSEQUES DU FROTTEMENT. Avec De Carbon [2](1942)on note que $\dot{Q}$ est un infiniment petit d'ordre 3 relativement à $\mathcal{P}_e$ pour toute évolution faite au voisinage à droite d'un instant d'inversion Cette "quasi reversibilité" entraîne :

Hypothèse 9 : Lors du chargement défini par $\mathcal{D}$, l'équation de Gibbs est :

$$\dot{E} = \dot{I} + \sigma_{aR}^{K,\alpha}\,\mathcal{D} \qquad (19)$$

Hypothèse 10 : A l'état initial neutre $\sigma_{aR}^{0,1}$ est nul.

La description thermomécanique est :

$$\dot{E} = \dot{I} + \Pi \qquad (20)$$

$$\Pi = \sigma_{aR}^{K,\alpha}\,\mathcal{D} \qquad (21)$$

$$\dot{E} - \dot{Q} = -\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_e \quad ; \quad \dot{I} - \dot{Q} = \phi \geqslant 0 \qquad (22)$$

$$\phi = \mathcal{P}_e - \Pi = -\mathcal{P}_i - \Pi = \sigma_a\,\mathcal{D} - \Pi = \left(\sigma_a - \sigma_{aR}^{K,\alpha}\right)\mathcal{D} = \dot{W}_L \qquad (23)$$

De même que l'équation de Gibbs, la puissance reversible reçue est à mémoire discrète définie ci-dessus. Par (22) on distingue que la somme du désordre créé et de la chaleur dégagée vaut la dissipation intrinsèque. Par (23) on constate que la fonction d'aide (8) a pour taux cette dissipation intrinsèque. Ainsi η , défini par (11), prend le sens d'une cumulation de dissipation intrinsèque.

2.3. Le modèle comme système ouvert

Hypothèse 11 : A chaque inversion du sens de sollicitation le modèle est un système ouvert vis à vis d'un flux infini de neguentropie, délivré durant un temps infiniment court, compensant exactement la dernière variation ΔI de I, produite le long de la

branche précédent l'inversion considérée.

Il en résulte que I est variable extensive normale, mesure de désordre. Considérons en effet, comme il est d'usage, l'évolution $ODdO$ (Fig. 3). Initialement : $\sigma = \varepsilon = 0$ A l'état final : $\sigma = \varepsilon = 0$, mais $I > 0$ (Fig. 4), ce qui exprime le désordre lié au fait que les positions des frotteurs ne sont pas celles initiales. En revanche, considérons l'évolution constituée par une infinité de cycles symétriques centrés, d'amplitudes lentement décroissantes et tendant vers 0. D'après l'hypothèse 11 : $\lim_{t \to \infty} I = 0$ (Fig. 4) et de même pour ε et σ . D'un autre côté on sait que le modèle a pour propriété fondamentale de remettre ses frotteurs en positions intiales. Ainsi les taux fondamentaux de la description (20) à (23) sont $\mathcal{D}$ et $\dot{I}$.

3. Ordre, chaleur, dissipation intrinsèque

La puissance $\mathcal{P}_e$ est la somme de $\sigma_{a1}\mathcal{D}$ et $\sigma_{a2}\mathcal{D}$. Or $\sigma_{a2}\mathcal{D}$ concerne le frottement. L'analyse de De Carbon [2] consiste à calculer $\dot{Q}$ c'est à dire $\sigma_{a2}\mathcal{D}$. Avec (17) :

$$-\dot{Q}(\varepsilon) = \sigma_{a2}\mathcal{D} = \sigma_a \dot{\varepsilon} - \varepsilon \dot{\sigma}_a \tag{24}$$

Avec (22) :

$$\dot{E}(\varepsilon) = \sigma_{a1}\mathcal{D} = \varepsilon \dot{\sigma}_a = \dot{I} \tag{25}$$

et puisque g'' est positif par définition :

$$-\dot{Q} \leq \mathcal{P}_e$$

Le long de la première charge la chaleur dégagée est inférieure au travail fourni : c'est l'effet Taylor-Farren-Quinney [3] , intrinsèque en ce sens qu'il reflète la conservation d'énergie (22) et se trouve défini dès lors que $\sigma_a(\varepsilon)$ est donné. Avec (25) cette définition est d'ailleurs graphiquement immédiate : $-\dot{Q}$ est l'ordonnée à l'origine de la tangente à $\sigma(\varepsilon)$ (Fig 5). D'où l'indicatrice de taux de chaleur. L'indicatrice de ϕ est immédiate : c'est $\sigma(\varepsilon)$ car $\Pi = 0$ par l'hypothèse 10 (Fig. 6).

En évolution cyclique centrée sur l'origine, (24) et (25) deviennent :

$$-\dot{Q}(\varepsilon - \varepsilon_R) = \frac{1}{2}\left[(\sigma_a - \sigma_{aR})\mathcal{D} - (\varepsilon - \varepsilon_R)\dot{\sigma}_a(\varepsilon - \varepsilon_R)\right] \tag{26}$$

$$\dot{E}(\varepsilon - \varepsilon_R) = \frac{1}{2}\left[(\sigma_a + \sigma_{aR})\mathcal{D} + (\varepsilon - \varepsilon_R)\dot{\sigma}_a(\varepsilon - \varepsilon_R)\right] \tag{27}$$

$$\dot{I}(\varepsilon - \varepsilon_R) = \frac{1}{2}\left[(\sigma_a - \sigma_{aR})\mathcal{D} + (\varepsilon - \varepsilon_R)\dot{\sigma}_a(\varepsilon - \varepsilon_R)\right] \tag{28}$$

Les indicatrices de $-\dot{Q}$ et ϕ se déduisent des précédentes par affinité de rapport 2 et homothétie de rapport 2 respectivement (Fig. 6). Une évolution quelconque est déterminée par la donnée de $\dot{I}$ et $\dot{Q}$ ou $\dot{E}$ et $\dot{Q}$. Tout est défini par la seule donnée de $\sigma_a(\varepsilon)$ ou $\phi(\varepsilon)$. En particulier $\dot{Q}$, donc ΔQ , est alors déterminé (Fig. 7). Les variations des taux sont représentées sur les figures 8 et 9. On note que ΔE par cycle fermé normal est nul. Au prix d'un dégagement de chaleur et de l'installation d'un désordre progressif (par glissements successifs des patins), l'essai de chargement fournit l'information $\sigma(\varepsilon)$ révélatrice de la structure du modèle et du comportement d'hystérésis pure, idéal, stable au sens de :

$$\dot{\sigma}_a \mathcal{D} > 0 \quad ; \quad \ddot{\sigma}_a \mathcal{D} \leq 0 \tag{29}$$

c'est à dire, sous sollicitation à $\mathcal{D}$ constant :

$$\dot{\phi} > 0 \quad ; \quad \ddot{\phi} \leq 0 \tag{30}$$

critère analogue à celui de Prigogine [4]. On note qu'assez loin de l'inversion : $\delta^2 S > 0$ et $\overline{\dot{\delta^2 S}} \leq 0$

Les propriétés d'hystérésis pure étant insensibles au mode de chargement il faut complèter (7) par :

$$\dot{\sigma}_a \mathcal{D} > 0 \tag{31}$$

dans le cas où σ_a est imposé. Le critère est (7) et (31).

De même que les propriétés mécaniques, les dissipations sont périodiquement restaurées. Une voie d'identification des processus microstructuraux associés est ainsi dégagée.

Dans le cas élastique-parfaitement plastique les évolutions des taux sont celles indiquées sur les figures 10. On note que durant la première charge (k = 0) : $\dot{I} = 0$. La description est affaire de chaleur et de travail : c'est la conception de Bridgman [5] . Deux positions de l'unique flotteur ne sont pas discernables en terme d'ordre. Durant la première décharge $\dot{I}$ devient non nul à la plasticité c'est à dire dès que s'installe le désordre de position relativement à l'état d'inversion, ce qui caractérise le frotteur.

4. L'analyse du comportement anélastique

4.1. L'évolution à température fixée en l'absence de conduction thermique

Si ρ note la masse volumique, e, i $(= T_0 s)$, ϖ , r_a/ρ les valeurs spécifiques de E, I, Π et $\dot{Q}$, (20) à (23) s'écrivent :

$$\rho \dot{e} = \rho \dot{i} + \rho \varpi \tag{32}$$

$$\rho \varpi = tr\, \sigma_{aR}^{k,d} \mathcal{D} \tag{33}$$

$$\rho \dot{e} - r_a = tr\, \sigma \mathcal{D} \quad ; \quad \rho \dot{i} - r_a = \phi \quad ; \quad \rho(\dot{e} - \dot{e}_a) = \rho(\dot{i} - \dot{i}_a) = tr\, \sigma_h \mathcal{D} \tag{34}$$

$$\phi = \sigma \mathcal{D} - \Pi = tr(\sigma_a - \sigma_{aR})\mathcal{D} + tr\, \sigma_h \mathcal{D} = \phi_a + \phi_h = \dot{W}_L + \phi_h \tag{35}$$

où ϕ_h est la somme de 4 termes ϕ_{vm} , ϕ_{vH} , ϕ_{gm} , ϕ_{gH} .

Puisque 1, 2, 3 ou 4 de ces termes peuvent être non nuls il y a 15 types d'écrouissages possibles.

Aux grandes valeurs de η , σ_a , σ_{vH} et σ_{gH} définissent les propriétés stationnaires (au sens de [1]) sous sollicitation monotone.

4.2. L'évolution en présence de conduction thermique

De même que l'on néglige les champs de forces extérieures, on néglige les taux de chaleur fournis par actions à distance. En revanche, on note que, dans la conservation d'énergie (34), figure explicitement le taux volumique r_a de chaleur fournie par le frottement interne intrinsèque des propriétés de la contribution d'hystérésis pure. En présence de conduction l'élément $\mathcal{E}$ du continu reçoit donc le taux de chaleur :

$$\int_{\mathcal{E}} r_a \, dv - \int_{\partial \mathcal{E}} \vec{q} \cdot \vec{n} \, ds$$

si q note la densité surfacique de taux de chaleur reçue par conduction. Alors (34) devient :

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho}(r_a - q_{i,i}) + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \mathcal{D}_{ij} \tag{36}$$

et la dissipation thermique est :

$$\phi_T = -\frac{1}{T} q_i T_{,i} \tag{37}$$

Hypothèse 12 : L'axiome de l'état local est utilisé pour étendre (32) selon :

$$\rho \dot{e} = \rho T \dot{s} + \sigma_{aR\,ij}^{K,\alpha} \mathcal{D}_{ij} \tag{38}$$

Il en résulte que (36) prend la forme :

$$\rho \dot{s} - \frac{r_a}{T} + \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} = \frac{1}{T}\left(\phi_T + \phi_a + \phi_h\right)$$

D'autre part les axiomes constitutifs, déduits de l'expérience, doivent permettre de définir dans (36) non seulement $\dot{e}$, q et σ mais aussi r_a associée à σ_a .

Dans le repère fixe orthonormé de vecteurs de base $\vec{e}_i$, le schéma thermoanélastique est alors de la forme suivante. Soit a_α les variables de Lagrange, $\vec{V} = V_i \vec{e}_i$ la vitesse du point M : $\vec{OM} = x_i(a_\alpha, 0, t)\, \vec{e}_i$ $(i = 1,2,3)$ et : $\vec{f}_K = r_K^i \vec{e}_i$ les vecteurs de base des repères corotationnels. A la conservation d'énergie (36) sont jointes les conservations :

$$\rho(t) = \rho(0) \det(x_{i,\alpha}) \quad ; \quad \rho \ddot{x}_i = \sigma_{ij,j} \tag{39}$$

les axiomes constitutifs classiques sont :

$$q_i = -k\, T_{,i} \quad ; \left(\dot{e} = c\, \dot{T}\right) \tag{40}$$

étant entendu que diverses lois de conduction peuvent être envisagées (cf [6] et [7],[8] par exemple). A cela s'ajoute la modification de Duhamel-Neumann :

$$3(3\lambda + 2\mu)\alpha \dot{T} \tag{41}$$

du taux de la trace de σ donnée par (16) (α note le coefficient de dilatation linéique). Comme en (34) il faut expliciter r_a . De plus il faut étendre le critère (31) : on peut envisager pour cela de prendre le taux de σ_a à $\dot{T}$ nul et en repères corotationnels. D'où :

$$\left([D_J \sigma_a]_{ij} - \frac{\partial \sigma_{a\,ij}}{\partial T} \dot{T}\right) \mathcal{D}_{ij} > 0 \tag{42}$$

ave c :

$$D_J \sigma = [D_J \sigma]_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \left[\dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik}\sigma_{kj} - \Omega_{jk}\sigma_{ik}\right] \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad ; \quad 2\Omega_{ij} = V_{i,j} - V_{j,i} \tag{43}$$

Il est intéressant d'examiner la possibilité d'une formulation simple et standard de r_a . Un exemple est :

$$-\frac{1}{\rho} r_a(t) = \sigma_{a\,ij} \mathcal{D}_{ij} - [D_J \sigma_a]_{ij} \left[r_K^i(t)\, r_\ell^j(t) \int_{t_R}^{t} \mathcal{D}_{IJ}(\tau)\, r_I^{-1\,K}(\tau)\, r_J^{-1\,\ell}(\tau)\, d\tau \right] \tag{44}$$

La description est alors constituée par (3),(16), (36) et (39) à (44). De même que la définition (3) à (10) de σ_a , les formes (19) et (38) de l'équation de Gibbs reflètent le rôle central joué par la notion de MEMOIRE DISCRETE [9] . C'est par là que s'avère peu commode le classement de la présente conception dans le cadre des formulations thermodynamiques classiques ([10] , [11]). On note simplement que dans la mesure où elle souligne le lien entre ordre, chaleur et dissipation intrinsèque, elle peut être rapprochée de celle de DAY ([12] [13] [14]). Il reste cependant à étudier l'utilité de la notion d'ordre dans le cas anisotrope.

Références

1 BOISSERIE, J.M., GUELIN, P., "Remarks on the tensorial formulation of constitutive laws describing mechanical hysteresis", Proc. the Fourth Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, USA, L 1/9, (August 15-19, 1977).

2 DE CARBON, C., "Déformation des solides", Compte Rendu à l'Académie des Sciences, Paris, T 215, p 241-244 (1942).

3 TAYLOR, G.I., QUINNEY, H., "The latent energy remaining in a metal after cold working" Proc. Roy. Soc. A, 143, p 307-326 (1934).

4 PRIGOGINE, I., "Non-equilibrium stability theory", Physica 46, p 344-366, (1970).

5 BRIDGMAN, P.W., "The Thermodynamics of plastic deformation and generalized entropy", Rev. Modern Physics, 22, 1, p 56-63 (1950).

6 VERNOTTE, P., "Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 246, p 3154-3155 (1958).

7 GREEN, A.E., LINDSAY, K.A., "Thermoelasticity", J. Elast. Vol 2, n° 1, p 1-7 (1972).

8 IGNACZAK, J., "Decomposition theorem for thermoelasticity with finite waves speeds", J. of Thermal Stresses, 1, 1, p 41-52 (1978).

9 VOGEL, T., "Théorie des systèmes évolutifs", Gauthier-Villars, Paris (1965).

10 TEJERINA, F., ZARAGOZA, C., "Sur les formulations de la Thermodynamique", Entropie, 75, p 3-10 (1977).

11 GERMAIN, P., "Thermodynamique des milieux continus", Entropie, 55, p 7-14, (1974).

12 DAY, W.A., "Continuum thermodynamics based on a notion of rate of loss of information", Arch. Rational Mech. Anal. 59, 53-62, 1975.

13 DAY, W.A., "The inaccessibility of the past in linear viscoelasticity : an information theory approach", Arch. Rational Mech. Anal. 64, 205-219, 1977.

14 DAY, W.A., "An information theory approach to the symmetry monotonicity and concavity of the creep function on linear viscoelasticity", Arch. Rational Mech. Anal. 65, p 47-55 (1977).

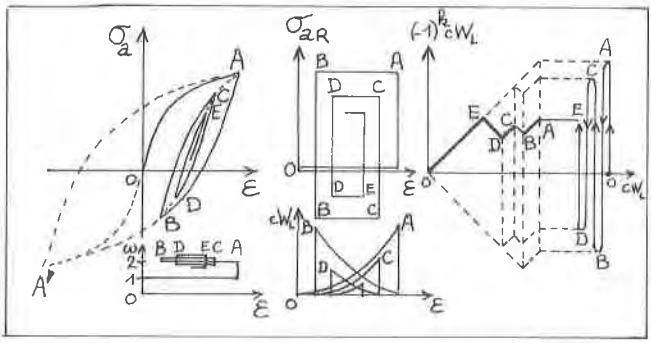

Fig. 1 Mémoire discrète en évolution cyclique simple OABCDE

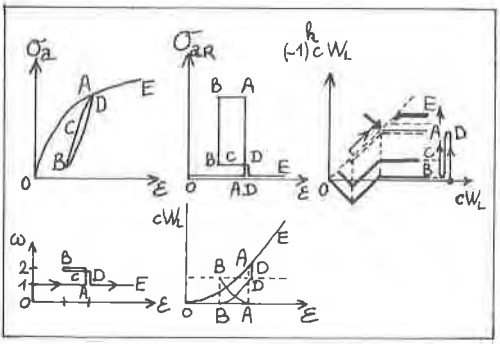

Fig. 2 Mémoire discrète en évolution cyclique complexe OABDCE

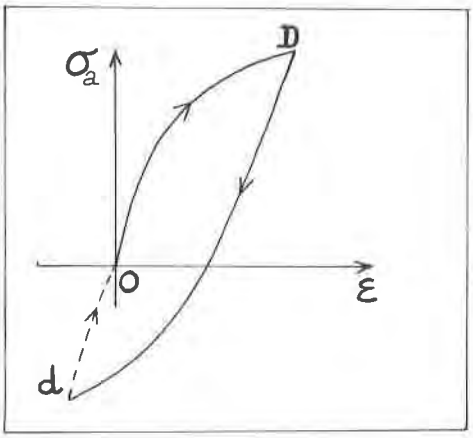

Fig. 3 Le trajet partant de et revenant à l'origine

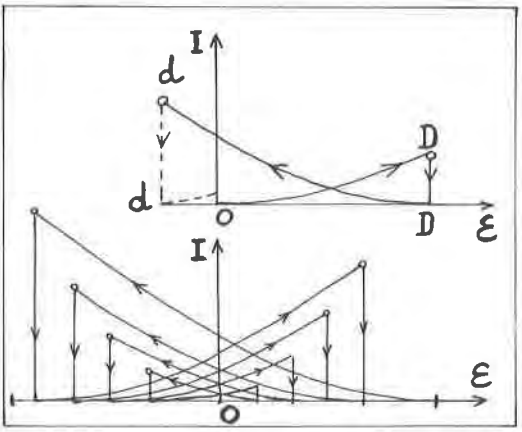

Fig. 4 Variations de la fonction de désordre pour le trajet fini ODdO et le trajet infini de restauration

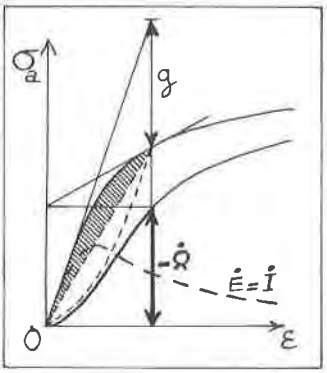

Fig. 5 Construction graphique du taux $-\dot{Q}$ de chaleur dégagée : le double de l'aire hachurée vaut l'intégrale de $-\dot{Q}$.

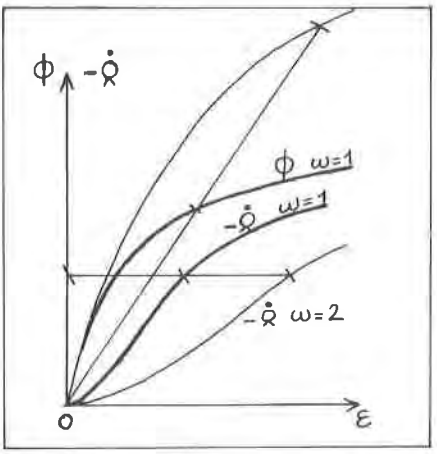

Fig. 6 Les indicatrices fondamentales des taux $-\dot{Q}$ et ϕ. (première charge : w = 1, branche : w = 2)

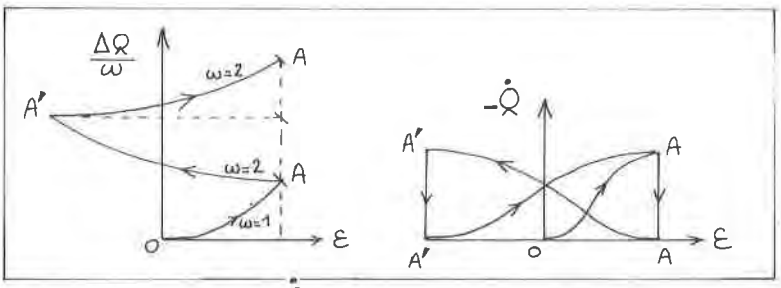

Fig. 7 Variation de $-\dot{Q}$ en évolution cyclique centrée (après première charge k = 0) et intégrales par branche ΔQ, du taux $-\dot{Q}$ (au facteur ω près)

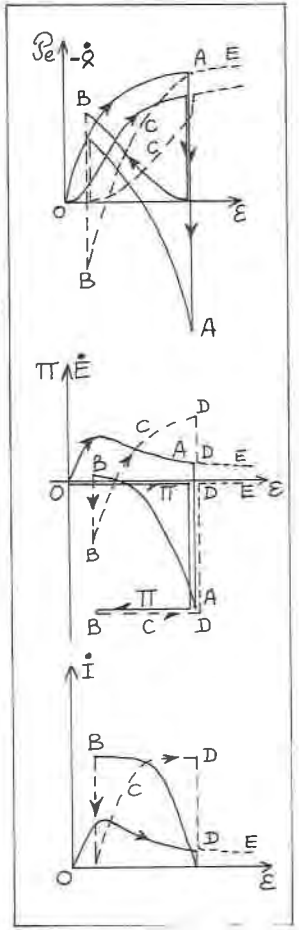

Fig. 8 Variation des taux $\mathcal{P}_e$ et $-\dot{\mathcal{R}}$, Π et $\dot{E}$, $\dot{I}$ pour l'évolution OABCDE de la figure 2.

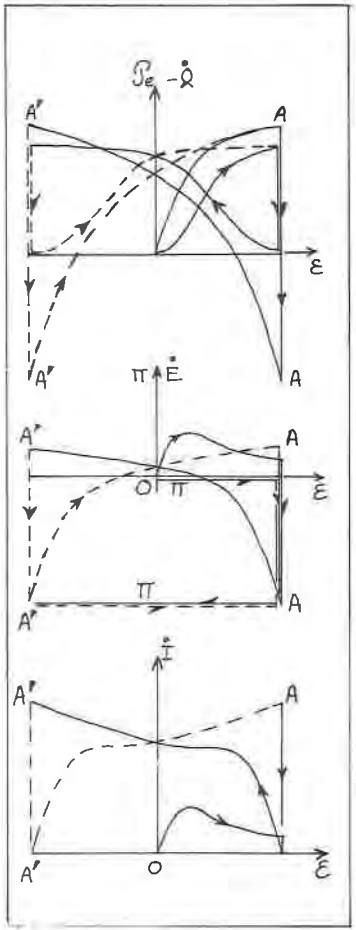

Fig. 9 Illustration analogue à celle de la figure 8 dans le cas cyclique centré

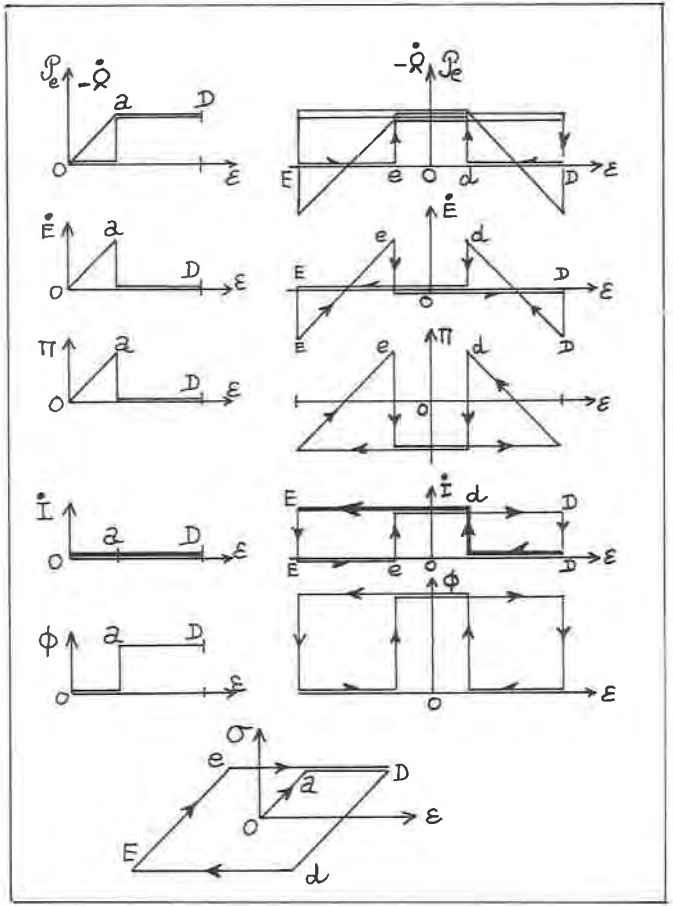

Fig. 10 Illustration analogue à celles des fig. 8 et 9 dans le cas élastique - plastique parfait