A Consistent Response Spectrum Method

D. Schmitz, K. Peters
INTERATOM, Internationale Atomreaktorbau GmbH, Postfach, D-5060 Bergisch-Gladbach, Germany

Summary

The computation of component loads due to seismic excitation commonly makes use of acceleration response spectra. There are two possible ways:

Method 1:
Decoupled computation of component and support structure (e.g. the building) via secondary spectra.

Method 2:
Computation of the coupled system component-support structure using primary spectra.

Though method 2 delivers the correct loads it is usually avoided because high computational effort is expected. The two methods may produce considerably different results due to the following inconsistencies of method 1:

1) Use of envelopes of secondary spectra under the assumption of equal movement of all component supports.

2) Inconsistent superimposition of the contributions of the singular supports if multifloor methods are used.

3) The transformation of accelerations into displacements which in general define the loads is not correctly feasible in the secondary spectrum approach.

In this paper it is shown that method 2 can be described in a form which avoids the explicit coupling of component and support structure. If the modal data of the support structure are known, and they must be known if secondary spectra are to be computed, the computational effort is not higher than a multifloor approach with secondary spectra.

1 Response Spectrum Analysis

Das Schwingungsverhalten des Systems Gebäude + Komponente wird durch drei Größen bestimmt, durch die

Steifigkeitsmatrix $\bar{K}$
Dämpfungsmatrix $\bar{C}$
Massenmatrix $\bar{M}$ (hier als Diagonalmatrix vorausgesetzt)

Eine weitere, aus $\bar{K}$ und $\bar{M}$ ableitbare, charakteristische Größe stellt die Eigenvektormatrix $\bar{\Phi}$ dar. Ihre Spalten sind die Eigenvektoren des Eigenwertproblems

$$\bar{K}\varphi = \bar{\omega}^2 \bar{M}\varphi \tag{1}$$

mit den Eigenwerten $\bar{\omega}^2$ (Kreiseigenfrequenzen der Struktur).

$\bar{K}$, $\bar{C}$, $\bar{M}$ und $\bar{\Phi}$ sind quadratische Matrizen vom Rang n + f, wobei n die Anzahl der Freiheitsgrade der Komponente und f die Anzahl der Freiheitsgrade des Gebäudes sind.
Wirkt auf die Struktur eine Bodenbeschleunigung b, so lauten die Bewegungsgleichungen in den Relativkoordinaten $\bar{x}_{rel}$ (Strukturbewegung minus Bodenbewegung)

$$\bar{M}\ddot{\bar{x}} + \bar{C}\dot{\bar{x}} + \bar{K}\bar{x} = -\bar{M}b \tag{2}$$

b hat n + f Komponenten, wobei die Komponenten mit Freiheitsgraden in derselben Richtung (x, y, z) gleich groß sind (d. h. nur drei Zahlenwerte b_x, b_y, b_z sind möglich).

Durch die Transformation

$$(\bar{x}_{rel})_K = \sum_{i=1} \bar{\Gamma}_i \bar{\Phi}_{Ki} \bar{\eta}_i \tag{3}$$

mit den "Partizipationsfaktoren"

$$\bar{\Gamma}_i = \sum_{K=1}^{n+f} \bar{M}_{KK} \bar{\Phi}_{Ki} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+f) \tag{4}$$

unter Berücksichtigung von

$$\bar{\Phi}^T \bar{M} \bar{\Phi} = [\ddots] \tag{5}$$

$$\bar{\Phi}^T \bar{K} \bar{\Phi} = [\bar{\omega}^2] \tag{6}$$

und unter Einführung einer modalen Dämpfung $[\ \bar{D}\ ]$ gemäß

$$\bar{\Phi}^T \bar{C} \bar{\Phi} = \left[2 \bar{D} \bar{\omega} \right] \tag{7}$$

läßt sich das gekoppelte Differentialgleichungssystem (2) in die Gleichungen

$$\ddot{\bar{\eta}}_i + 2 \bar{D}_i \bar{\omega}_i \dot{\bar{\eta}}_i + \bar{\omega}_i^2 \bar{\eta}_i = - b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+f) \tag{8}$$

entkoppeln.
Nun liegt nicht die Zeitfunktion b(t) für ein zu erwartendes Erdbeben vor, sondern das Bodenantwortspektrum S ($\bar{\omega}$, $\bar{D}$,), das gemäß

$$|\ddot{\bar{\eta}}_i + b_i|_{max} = S(\bar{\omega}_i, \bar{D}_i) \tag{9}$$

definiert ist. In sehr guter Näherung läßt sich wegen (8) auch $|\bar{\eta}_i|_{max}$ angeben

$$|\bar{\eta}_i|_{max} \approx \frac{|\bar{\eta}_i + b_i|_{max}}{\bar{\omega}_i^2} = \frac{S(\bar{\omega}_i, \bar{D}_i)}{\bar{\omega}_i^2} \tag{10}$$

Die Aussage der Response Spectrum Analysis ist nun, daß der Wert

$$|\bar{x}_{rel}|_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+f} \left[\bar{\Gamma}_i \bar{\Phi}_{Ki} \, S(\bar{\omega}_i, \bar{D}_i) / \bar{\omega}_i^2 \right]^2} \tag{11}$$

als maximale Relativbewegung zu erwarten ist.

Mit der Größe $|\bar{x}_{rel}|_K$ lassen sich auch alle anderen interessanten Größen wie Schnittkräfte, Spannungen usw. berechnen.

2 Ziel

Hier soll nicht die Güte von (11) untersucht werden ((11) ist sicherlich falsch, wenn zwei Frequenzen eng beieinander liegen), sondern lediglich die Größen

$$\bar{\Gamma}_i \bar{\Phi}_{Ki} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+f)$$

des gekoppelten Systems Gebäude + Komponente bestimmt werden, wenn k einen "Komponentenort" kennzeichnet und die dynamischen Daten sowohl des Gebäudes wie auch der Komponente bekannt sind.

3. Berechnung der Größen $\bar{\Gamma}_i \bar{\Phi}_{Ki}$

Es wird vorausgesetzt, daß die dynamisch relevanten Größen (Eigenfrequenzen, Eigenformen) des Gebäudes durch die Komponente nur unwesentlich beeinflußt werden (rückwirkungsfreie Komponente). Dann zerfallen die Eigenformen des gekoppelten Systems Gebäude + Komponente in Eigenformen, bei denen

- die Gebäudeanteile mit den Eigenformen des Gebäudes ohne Komponente übereinstimmen und sich die Komponentenanteile als Antwort auf diese Gebäudeeigenformen, d. h. als erzwungene Schwingung ermitteln lassen (Gebäudemoden),
- die Komponente in der jeweiligen Eigenform so schwingt, als ob kein Gebäude vorhanden wäre (Komponentenmoden) und sich das Gebäude nur noch in einem Normierungsfaktor aufgrund von (5) bemerkbar macht.

Die folgende Ableitung wird physikalisch begründet. Sie läßt sich jedoch streng mathematisch mit demselben Resultat durchführen.

3.1 Gebäudemoden

Die Bewegungsgleichungen der Komponente, die durch die f Gebäudeschwingungen zwangsbewegt wird, lauten

$$M\ddot{x} + Kx = -K_s \phi_i^E \quad (i = 1, 2, \dots, f) \tag{12}$$

wobei M die Massenmatrix und K die Steifigkeitsmatrix der Komponente bedeuten, beides quadratische Matrizen vom Rang n. x ist der Verschiebungsfaktor, K_s die Steifigkeitsmatrix, die die Verknüpfung der freien Massenpunkte mit den Befestigungspunkten am Gebäude darstellt. K_s hat n Zeilen und m Spalten, d. h. die Komponente ist mit m Freiheitsgraden am Gebäude befestigt. ϕ_i^E ist derjenige Teil des i-ten Gebäudeeigenvektors, der nur die m Befestigungsfreiheitsgrade beinhaltet.

Durch Einführung der Relativkoordinaten

$$x_{rel} = x + K^{-1} K_s \phi_i^E \tag{13}$$

werden die Bewegungsgleichungen (12) in

$$M\ddot{x}_{rel} + Kx_{rel} = MK^{-1} K_s \ddot{\phi}_i^E \tag{14}$$

umgeformt.
Mit der Eigenvektormatrix Φ der Komponente, der "Partizipationsmatrix"

$$\Gamma = -\Phi^T M K^{-1} K_s \tag{15}$$

und der Transformation

$$x_K = \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Phi_{Kp} \Gamma_{pj} \left(\eta_{pj} + \Phi_{ji}^{B} \right) \tag{16}$$

läßt sich (14) in n x m unabhängige Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\eta}_{pj} + \omega_p^2 \eta_{pj} = -\ddot{\Phi}_{ji}^{B} \left(p = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m \right)$$

(ω_p Eigenkreisfrequenz der Komponente) (17)

für jede Gebäudeeigenschwingung i = 1, 2, ..., f entkoppeln.
Die Zeitabhängigkeit von Φ_{ji}^{B} ist bekannt

$$\Phi_{ji}^{B} \sim \sin(\varkappa_i \cdot t) \tag{18}$$

wobei $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_f$ die Eigenfrequenzen des Gebäudes sind.
Somit ist die Lösung von (17)

$$\eta_{pj} = \frac{\varkappa_i^2}{\omega_p^2 - \varkappa_i^2} \Phi_{ji}^{B}$$

bzw.

$$\eta_{pj} + \Phi_{ji}^{B} = \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \varkappa_i^2} \Phi_{ji}^{B} \tag{19}$$

(19) in (16) eingesetzt, liefert

$$x_K \equiv \bar{\Phi}_{Ki} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Phi_{Kp} \Gamma_{pj} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \varkappa_i^2} \Phi_{ji}^{B} \left(i = 1, 2, \ldots, f \right) \tag{20}$$

Außerdem gilt

$$\bar{\Gamma}_i = \Gamma_i^{B} \left(i = 1, 2, \ldots, f \right) \tag{21}$$

wobei Γ_i^{B} die Partizipationsfaktoren des Gebäudes darstellen.

3.2 Komponentenmoden

Da wegen

$$\bar{\Phi}^T \bar{M} \bar{\Phi} = \left[\ \ 1 \ \ \right]$$

auch

$$\bar{\Phi}\, \bar{\Phi}^T \bar{M} = \left[\ \ 1 \ \ \right] \tag{22}$$

gilt, folgert man für jedes $K = 1, 2, \ldots, n + f$

$$\sum_{i=1}^{n+f} \bar{\Phi}_{Ki} \bar{\Gamma}_i = 1 \tag{23}$$

also unter Beachtung von (20 und (21)

$$\sum_{i=f+1}^{n+f} \bar{\Phi}_{Ki} \bar{\Gamma}_i = 1 - \sum_{i=1}^{f} \bar{\Phi}_{Ki} \bar{\Gamma}_i^{\mathrm{B}}$$

$$= 1 - \sum_{l=1}^{f} \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Phi_{Kp} \Gamma_{pj} \Phi_{jl}^{\mathrm{B}} \Gamma_l^{\mathrm{B}} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \varkappa_l^2} \tag{24}$$

Es kann gezeigt werden, daß

$$\sum_{j=1}^{m} \Gamma_{pj} = \Gamma_p \tag{25}$$

mit dem üblichen Partizipationsfaktor Γ_p der Komponente.
Da entsprechend (23)

$$\sum_{p=1}^{n} \Phi_{Kp} \Gamma_p = 1 \tag{26}$$

$$\sum_{l=1}^{f} \Phi_{jl} \Gamma_l^{\mathrm{B}} = 1 \tag{27}$$

läßt sich (24) umformen in

$$\sum_{i=f+1}^{n+f} \bar{\Phi}_{Ki} \bar{\Gamma}_i = \sum_{p=1}^{n} \sum_{l=1}^{f} \sum_{j=1}^{m} \Phi_{Kp} \Gamma_{pj} \Phi_{jl}^{\mathrm{B}} \Gamma_l^{\mathrm{B}} \frac{-\varkappa_l^2}{\omega_p^2 - \varkappa_l^2} \tag{28}$$

Der Aufbau von (28) legt den Schluß nahe,

$$\bar{\Phi}_{Ki} \bar{\Gamma}_i = \sum_{l=1}^{f} \sum_{j=1}^{m} \Phi_{K,i-f} \Gamma_{i-f,j} \Phi_{jl}^{\mathrm{B}} \Gamma_l^{\mathrm{B}} \frac{-\varkappa_l^2}{\omega_{i-f}^2 - \varkappa_l^2} \tag{29}$$

$$(i = f+1, f+2, \ldots, n+f)$$

zu setzen, was sich auch streng mathematisch begründen läßt.
Mit (20), (21) und (29) ist die gestellte Aufgabe gelöst.

4 Schlußbemerkung

Die übliche RSA enthält einige unlogische Schlüsse, die auf einfache Weise beseitigt werden können. Floor Response Spectren lassen sich nicht widerspruchsfrei definieren, auch wenn die Komponente nur an einer Stelle am Gebäude abgestützt ist. Vielmehr müssen die Gebäudedaten in die Komponentenrechnung integriert werden.
Über die Unterschiede in den Ergebnissen, die nach der üblichen und der hier vorgestellten Theorie ermittelt werden, sind keine allgemeinen Aussagen möglich.

5 References

/ 1 / D. E. Shaw, "Seismic Structural Response Analysis for Multiple Support Excitation", 3rd SMIRT, K7/3

/ 2 / D. Schmitz, K. Peters, "Direct Evaluation of Floor Response Spectra from a Given Ground Response Spectrum", 4th SMIRT, K4/10

/ 3 / K. Peters, D. Schmitz, U. Wagner, "Determination of Floor Response Spectra on the Basis of the Response Spectrum Method", Nuclear Engineering and Design 44 (1977) 255-262

/ 4 / K. R. Leimbach, H. P. Sterkel, "Comparison of Multiple Support Excitation Solution Techniques for Piping Systems", 5th SMIRT, K10/2